Nom :………………………………………. **DS n°2** **T.S.**
Prénom : ……………………………… **le 18/10/2018**

	Avis du professeur		
Compétences évaluées :	*Acquis*	*En cours d'acquisition*	*Non Acquis*
Suites numériques : ………. / 8,5 points			
Démontrer un théorème de comparaison			
Mener un raisonnement par récurrence			
Etudier la convergence d'une suite			
Etudier les variations d'une fonction du second degré			
Compléter un algorithme de seuil			
Géométrie dans l'espace : ……… / 11,5 points			
Construire la section d'un tétraèdre par un plan en justifiant la démarche			
Montrer que 4 points sont coplanaires			
Etudier la position relative de deux droites			
Déterminer la nature d'un quadrilatère			

Exercice 1 : [Démonstration] **…… / 1,5 pts**

Démontrer le théorème de comparaison suivant :

Soit (u_n) *et* (v_n) deux suites telles qu'à partir d'un certain rang : $u_n \leq v_n$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Exercice 2 : **…… / 7 pts**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$$

Soit a un réel positif.
On définit la suite (u_n) par : $u_0 = a$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$ suivant différentes valeurs de son premier terme $u_0 = a$.

1. Dans cette question, on suppose que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
   a) En remarquant que $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{1}{2}{u_n}^2 - u_n + \frac{3}{2}$, montrer que : $\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2}$
   b) Montrer que les valeurs possibles de ℓ sont 1 et 3.

2. Dans cette question, on prend $a = 2{,}9$.
   a) Montrer que f est croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.
   b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
   ***Rappel* : Une fonction f est croissante sur un intervalle I si et seulement si pour tout réel a et b de I tel que $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$.**
   c) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

3. Dans cette question, on prend $a = 3{,}1$. On admet que, dans ce cas, la suite (u_n) est croissante.
   a) A l'aide des questions précédentes, montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.
   b) En déduire le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
   c) L'algorithme suivant calcule le plus petit rang p pour lequel $u_p > 10^6$.
   Recopier et compléter cet algorithme.
   P est un nombre entier et U est un nombre réel.

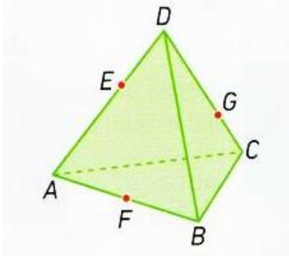
```
P ← 0
U  ………….
Tant que ……..
        P ←………….
        U ← …………..
Fin Tant que
Afficher …….
```

Exercice 3 : [E.C.] …… / 5 pts

**** Les 3 parties de cet exercice sont indépendantes ****

Partie 1 :

Tracer la section du tétraèdre ABCD suivant le plan (EFG), sachant que E est un pont de l'arête [AD], G un point de l'arête [DC] et F un point de l'arête [AB].



Rédiger un protocole de construction.

Partie 2 :

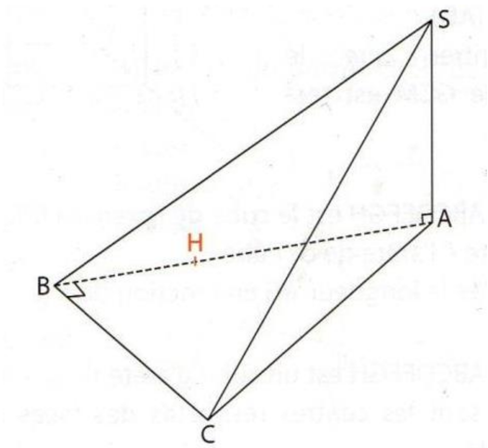
On considère ABCD un tétraèdre. Soit M le point tel que $\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MC}$.
Montrer que le point M appartient au plan (ABC).

Partie 3 :

On donne les points $A(1;-2;3)$; $B(2;-3;3)$; $C(2;0;0)$ et $D(4;1;-3)$.
Les points A,B, C et D sont-ils coplanaires ? *Justifier la réponse.*

Exercice 4 : …… / 6,5 pts

SABC est un tétraèdre, la droite (SA) est orthogonale au plan (ABC) et le triangle ABC est rectangle en B.



1. Justifier que les droites (BC) et (SA) sont orthogonales.
2. Démontrer que le triangle SBC est rectangle en B.
3. On note H un point du segment [AB]. Le plan $\mathcal{P}$ orthogonal à (AB) et passant par H coupe (AC) en I, (SC) en J et (SB) en K. On se propose de construire les points I, J et K.
   a) Démontrer que (HI) et (BC) sont parallèles.
   b) En déduire que (HI) et (KJ) sont parallèles.
   c) On admet que les droites (HK) et (IJ) sont parallèles.
   Quelle est la nature du quadrilatère HIJK ?
   d) Construire I, J et K.
4. Les vecteurs $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{HJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 1 : Voir Cours chapitre 1 – Démonstration du théorème de comparaison en $+\infty$.

Exercice 2 :

1.

a) $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n) \quad et\ f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$

$donc\ \forall n \in \mathbb{N}\ : u_{n+1} = \frac{1}{2}{u_n}^2 - u_n + \frac{3}{2}$

Or (u_n) converge vers un réel ℓ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Donc par produit et somme de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} {u_n}^2 = \ell^2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\,{u_n}^2 - u_n + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\,\ell^2 - \ell + \frac{3}{2}$

Et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Donc on obtient $\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2}$

a) $\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\,\ell^2 + 2\ell - \frac{3}{2} = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = 1 > 0$ l'équation admet donc deux solutions réelles.

$\ell_1 = \frac{-2-\sqrt{1}}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = 3 \ \ et\ \ell_2 = \frac{-2+\sqrt{1}}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = 1$

Ainsi, les deux valeurs possibles pour ℓ sont 1 et 3.

2. Dans cette question, on prend $a = 2{,}9$.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2\times\frac{1}{2}} = 1$ et $a = \frac{1}{2} > 0$ donc f est croissante sur $[1;+\infty[$.

<u>Autre méthode</u> : $f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x - 1 = x - 1$

Or $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

Donc $\forall x \geq 1 : f'(x) \geq 0$

Donc f est croissante sur $[1;+\infty[$

b) Pour tout entier naturel n , on note $P(n)$: « $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ »

<u>Initialisation</u> : $u_0 = a = 2{,}9$ et $u_1 = \frac{1}{2} \times 2{,}9^2 - 2{,}9 + \frac{3}{2} = 2{,}805$

Donc $1 \leq u_1 \leq u_0$ et $P(0)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : Soit k un entier naturel fixé.

Supposons que $P(k)$ est vraie c'est-à-dire : $1 \leq u_{k+1} \leq u_k$

Montrons que $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire : $1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$

On sait, par hypothèse de récurrence que : $1 \leq u_{k+1} \leq u_k$

Or f est croissante sur $[1\,;+\infty[$

Donc $f(1) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$

Donc : $1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$ et $P(k+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : $P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire donc la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

c) D'après la question b) $\forall n \in \mathbb{N}: 1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1.

On en déduit que (u_n) est convergente vers un réel supérieur ou égal à 1.

D'après la question 1. Les valeurs possibles de la limite ℓ sont 1 et 3.

Or (u_n) est décroissante et a pour premier terme $u_0 = 2{,}9$ donc sa limite est inférieure ou égale à 2,9.

Donc (u_n) converge vers 1.

3. Dans cette question, on prend $a = 3{,}1$. On admet que la suite (u_n) est croissante.
   a) La suite (u_n) est croissante. Supposons que la suite (u_n) soit majorée alors dans ce cas, (u_n) est convergente vers 1 ou 3 d'après la question 1.
   Or $u_0 = 3{,}1 > 3$ donc (u_n) ne peut pas converger vers 1 ou 3.
   L'hypothèse « la suite est majorée » est absurde.
   Conclusion : la suite (u_n) n'est pas majorée.

   b) La suite (u_n) est croissante et non majorée donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

   c)

$P \leftarrow 0$
$U \leftarrow 3{,}1$
Tant que $U \leq 10^6$
    $P \leftarrow P + 1$
    $U \leftarrow \frac{1}{2}U^2 - U + \frac{3}{2}$
Fin Tant que
Afficher P

Exercice 3 : [E.C.] …… / 5 pts

Partie 1 : Exercice n° 45 p 298
Partie 2 : Exercice n° 4 p 313
Partie 3 : Exercice n°16 p 323

Exercice 4 : …… / 6,5 pts

1. On sait que la droite (SA) est orthogonale au plan (ABC) et $(BC) \subset (ABC)$
Or si une droite $\mathcal{D}$ est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ alors $\mathcal{D}$ est orthogonale à toute droite du plan $\mathcal{P}$.
Donc (BC) et (SA) sont orthogonales.

2. On sait que (BC) et (SA) sont orthogonales et (BC) et (AB) sont orthogonales (ABC triangle rectangle en B)
Et (SA) et (AB) sont deux droites sécantes du plan (SAB)
Or si une droite $\mathcal{D}$ est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$ alors $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
Donc (BC) est orthogonale au plan (SAB)

De plus, (BC) est orthogonale au plan (SAB) et $(SB) \subset (SAB)$
Or si une droite $\mathcal{D}$ est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ alors $\mathcal{D}$ est orthogonale à toute droite du plan $\mathcal{P}$.
Donc (BC) et (SB) sont orthogonales.
Or (BC) et (SB) sont sécantes en B donc (BC) et (SB) sont perpendiculaires et le triangle SBC est rectangle en B.

3.
   a) Le plan $\mathcal{P}$ est orthogonal à (AB) et $(HI) \subset \mathcal{P}$, donc (AB) et (HI) sont perpendiculaires.
   D'autre part, on sait que : (BC) et (AB) sont perpendiculaires.
   Les droites (AB), (BC) et (HI) sont incluses dans le plan (ABC).
   Or, dans un plan, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.
   Donc (HI) et (BC) sont parallèles.

   b) Les plans (SBC) et (IHJ) sont sécants suivant la droite (KJ).
   On sait que (HI) et (BC) sont parallèles.
   Donc d'après le théorème du toit : (KJ) est parallèle à (BC) et (HI).

   c) Les droites (HK) et (IJ) sont parallèles et (HI) et (KJ) sont parallèles.
   Ainsi HIJK est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.
   Donc HIJK est un parallélogramme.

De plus, (HI) est parallèle à (BC) et (BC) est orthogonale au plan (SAB)
Donc (HI)est orthogonale à (SAB)
$or\ \ (HK) \subset (SAB)$
Donc (HI) est perpendiculaire à (HK).
Donc HIJK est un parallélogramme ayant un angle droit, HIJK est donc un rectangle.

d) Construction.

e) $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{HK}$ sont colinéaires ; $\overrightarrow{BC}\ et\ \overrightarrow{HI}$ sont colinéaires.
Or les vecteurs $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{HK}$ et $\overrightarrow{HJ}$ sont coplanaires. (plan $\mathcal{P}$)
Donc les vecteurs $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{HJ}\ et\ \overrightarrow{BC}$ sont coplanaires.