Nom : **DS n°2** *(sujet de remplacement)* *Classe : TS…*

Prénom : le 04/11/2016

Compétences	*Acquis*	*En cours d'acquisition*	*Non acquis*
Prise d'initiative			
Maitrise des calculs			
Raisonnement par récurrence			
Détermination de limites			
Calcul vectoriel			
Droites coplanaires – Droites sécantes			
Droites orthogonales			
Droite perpendiculaire à un plan			
Intersection de plans-section d'un cube par un plan			
Justifier -Argumenter			

Barème	Ex n°1: 2 points	Ex n°2 : 4 points	Ex n°3 : 3,5 points	Ex n°4 : 5 points	Ex °5 : 5,5 points	Total : 20 points
Note de l'élève						

Exercice n°1 :

Restitution de cours : Démontrer pour q > 1 que $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$. On suppose q =a + 1 a> 0

- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $q^n \geq 1 + na$
- En déduire la limite de (q^n).

Application :

Déterminer la limite de la suite suivante en +∞ : $U_n = 3^n - 2^n$.

Exercice n°2 : La suite (u_n) est définie sur ℕ par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2 - \frac{3}{u_n + 2}$

a. Soit f la fonction telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ .Etudier les variations de la fonction f.
b. A l'aide de la calculatrice conjecturer les variations et la convergence de la suite (u_n) .
c. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 < u_n < 2$ et les variations de la suite (u_n).
d. Démontrer que la suite converge vers un réel ℓ .Déterminer la limite.

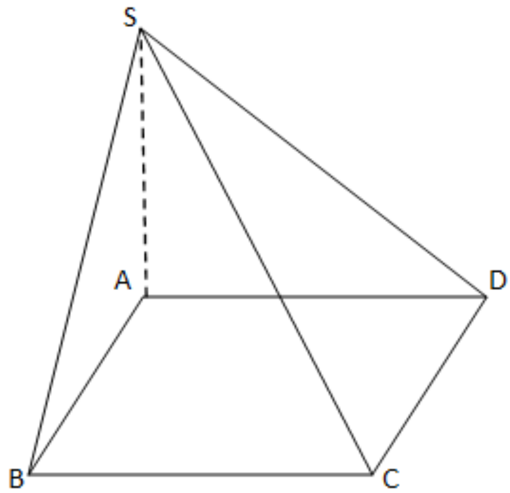
Exercice n°3 : ABCD est un tétraèdre. Le point M est tel que $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$

1. Construire une figure sur votre feuille que vous complèterez au fur et à mesure.
2. Démontrer que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
3. En déduire que M est un point du plan (ABC) .
4. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
5. Que peut-on dire des points A, I et M ?

Exercice n°4 : SABCD est une pyramide à base carrée, telle que les faces ABS et ADS soient des triangles rectangles isocèles en A.

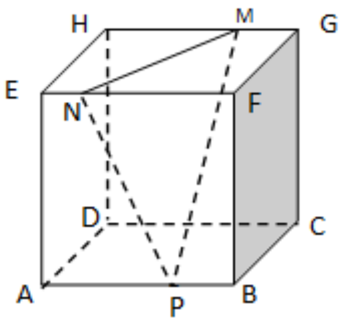
I et J sont les milieux respectifs des arêtes [SB] et [SC].

1. Compléter la figure ci-contre.
2. Montrer que les points A, I, J et D sont coplanaires.
3. Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABS)
4. En déduire que les droites (IJ) et (AI) sont perpendiculaires.
5. Les plans (SBC) et (SAD) sont sécants suivant une droite Δ .
   Construire Δ et justifier la construction.
6. Soit (d) une droite du plan (SAD) passant par D telle que les droites (d) et (BJ) soient sécantes .Construire (d) .Justifier



Exercice n°5 Section d'un cube

1. ABCDEFGH est un cube



a) La droite (MN) coupe le plan (ADE) en R. Placer le point R.
   La droite (NP) coupe le plan (ADE) en T. Placer le point T.
   Tracer la droite d'intersection des plans (MNP) et (ADE)
b) Le plan (MNP) coupe le plan (DCG) .Quelle est l'intersection des deux plans ? La tracer. Justifier
c) La droite (NP) coupe le plan (FBC) en S. En déduire l'intersection du plan (MNP) et du plan (FBC).
   La tracer. Justifier
d) Tracer en rouge sur votre figure la section du cube par le plan (MNP).
e) Soit I le milieu du segment [FG], J le milieu de [EF] et K le milieu de [HG].Démontrer que les plans (IJB) et (ACK) sont parallèles

TS1 — Corrigé DS n°2 (remplacement) — 04/11/2016

Exercice n°1 :

- Question de cours : $\forall n \in \mathbb{N}$, $q>1$, $q^n \geqslant 1+na$, $q = 1+a$, avec $a>0$
- $\forall n \in \mathbb{N}$ $q^n \geqslant 1+na$ avec $a>0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 1+na = +\infty$, en utilisant le théorème de comparaison en l'infini, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

Application : $3>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$

$2>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$

donc pour déterminer la limite de (u_n) en $+\infty$ on obtient une FI du type "$+\infty - \infty$"

Levons l'indétermination :

$$u_n = 3^n\left(\frac{3^n}{3^n} - \frac{2^n}{3^n}\right)$$

$$u_n = 3^n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

- $-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exercice n°2 : $u_0 = 2$ $\quad u_{n+1} = 2 - \dfrac{3}{u_n+2}$; $u_{n+1} = f(u_n)$

a/ $f(x) = 2 - \dfrac{3}{x+2}$

$u : x \mapsto x+2$, u est une fonction affine $a=1>0$ donc u est croissante

- u et $\dfrac{1}{u}$ ont des variations inverses donc $x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$ est décroissante sur $]-\infty;-2[$ et sur $]-2;+\infty[$
- $-3<0$ donc $x \mapsto -3 \times \dfrac{1}{x+2}$ est croissante.
- on ajoute 2 donc $f : x \mapsto 2 - \dfrac{3}{x+2}$ est croissante sur $]-\infty;-2[$ et sur $]-2;+\infty[$

ou bien : $f'(x) = 0 - 3\times\left(\dfrac{-1}{(x+2)^2}\right) = \dfrac{3}{(x+2)^2}$.

$3>0$; $(x+2)^2>0$ donc $f'(x)>0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;-2[$ et sur $]-2;+\infty[$.

b/ la suite semble décroissante et converger vers 1.

c/ Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}$ $1 < u_{n+1} < u_n \leqslant 2$.

On pose P_n : "$1 < u_{n+1} < u_n \leqslant 2$"

① **Initialisation :**

$u_0 = 2$ $\quad u_1 = 1{,}25$ $\quad 1 < u_1 < u_0 \leqslant 2$

donc P_0 est vraie

② **Hérédité :**

On suppose que P_n est vraie pour un entier $n \geqslant 0$ démontrons que P_{n+1} est vraie.
c'est à dire $1 < u_{n+2} < u_{n+1} \leqslant 2$

P_n vraie $\Leftrightarrow$ $1 < u_{n+1} < u_n \leqslant 2$ $\quad$ $f \nearrow$ sur $]-2;+\infty[$

$f(1) < f(u_{n+1}) < f(u_n) \leqslant f(2)$

or $f(1) = 1$ et $f(2) = 1{,}25 \leqslant 2$

donc $1 < u_{n+2} < u_{n+1} \leqslant 2$ donc P_{n+1} vraie
la propriété est héréditaire.

③ Conclusion.

- P_0 vraie
- La propriété est héréditaire

donc $\forall n \in \mathbb{R}$ $\quad 1 < u_{n+1} < u_n \leq 2$.

donc (u_n) est décroissante minorée par 1 et majorée par 2.

d. • (u_n) décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers un réel $l \geqslant 1$.

• $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + 2 = l+2$.

$l+2 \neq 0$ car $1 \leqslant l \leq 2$ donc $3 < l+2 \leq 4$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{3}{u_n+2} = 2 - \dfrac{3}{l+2}$

or $u_{n+1} = 2 - \dfrac{3}{u_n+2}$ donc $\boxed{l = 2 - \dfrac{3}{l+2}}$,

• Recherchons la valeur de l :

$l - 2 = \dfrac{-3}{l+2} \iff (l-2)(l+2) = -3$

$\iff l^2 - 4 = -3$

$\iff l^2 = 1$

$\iff l = 1$ ou $l = -1$

or $1 \leqslant l \leq 2$ donc $l = -1$ impossible

donc $l = 1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

Exercice n°3 :

2.

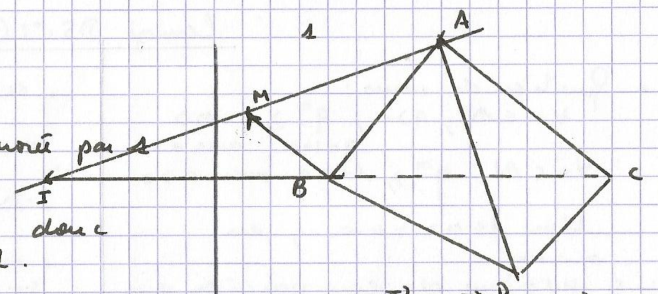
$\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC} = \vec{0} \iff \vec{MA} + 2(\vec{MA} + \vec{AB}) - (\vec{MA} + \vec{AC}) = \vec{0}$

$\iff 2\vec{MA} + 2\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{0}$

$\iff \vec{MA} = -\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

$\iff \vec{AM} = \vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}$

1



3. $\vec{AM} = \vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}$.

Les points A, B et C ne sont pas alignés donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.

donc les vecteurs $\vec{AM}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont coplanaires, formés de 4 points donc les points A, M, B et C sont coplanaires donc $M \in (ABC)$

4. $\vec{AI} = \vec{AB} + \vec{CB} =$
$= \vec{AB} + \vec{CA} + \vec{AB}$
$= 2\vec{AB} - \vec{AC}$

5. $\left.\begin{array}{l} \vec{AM} = \vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC} \\ \vec{AI} = 2\vec{AB} - \vec{AC} \end{array}\right\}$ donc $2\vec{AM} = \vec{AI}$

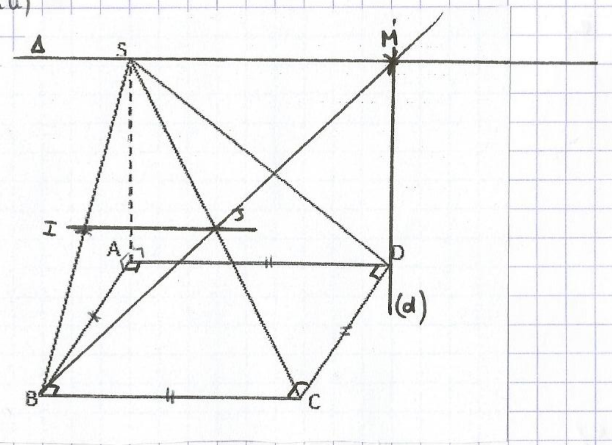
donc les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{AI}$ sont colinéaires et ont le point A en commun donc les points A, M et I sont alignés.

Exercice n°4 :

②

Ex4 (suite)

1.



2. Dans le triangle SBC.
- I milieu de [SB]
- J milieu de [SC]

d'après le théorème des milieux.
(IJ) // (BC)

- Dans le carré ABCD
(BC) // (AD)

donc (IJ) // (AD) donc les droites sont coplanaires, donc les points A, I, J et D sont coplanaires.

3. Par hypothèse (AD) ⊥ (AS)
(AD) ⊥ (AB) } donc (AD) ⊥ (ABS)

((AD) orthogonale à 2 droites sécantes du plan (ABS))

DS n°2 (remplacement) 04/11/2016

4. (AD) ⊥ (ABS) donc (AD) est orthogonale à toute droite du plan (ABS).
(AI) ⊂ (ABC) donc (AD) ⊥ (AI)
or (AD) // (IJ)
donc (AI) ⊥ (IJ)
donc les droites (AI) et (IJ) sont perpendiculaires en I.

5. S ∈ (SAD) et S ∈ (SBC) donc S ∈ (SAD) ∩ (SBC)
- Les deux plans (SAD) et (SBC) sont sécants suivant une droite Δ qui passe par S.
- ABCD est un carré donc
(BC) // (AD)

or (BC) ⊂ (SBC)
(AD) ⊂ (SAD) } donc d'après le théorème du toit
Δ // (BC) // (AD)

Donc Δ est la parallèle à (BC) passant par S

6. (BJ) ⊂ (SBC) et Δ ⊂ (SBC) donc (BJ) et Δ sont sécantes en un point M.
- M ∈ Δ et Δ ⊂ (SAD) donc M ∈ (SAD) donc la droite (DM) est une droite du plan (SAD). Posons (d) = (DM)

. Les droites (BJ) et (d) sont sécantes en M.

Exercice n°5:

a/ Les plans (MNP) et (ADE) sont sécants suivant une droite.
T ∈ (NP) ∩ (EA) (NP) ⊂ (MNP) et (EA) ⊂ (ADE)
donc T ∈ (MNP) ∩ (ADE)
R ∈ (MN) ∩ (EH) (MN) ⊂ (MNP) et (EH) ⊂ (ADE)
donc R ∈ (MNP) ∩ (ADE)

3

Ex 5 (suite). Donc la droite (TR) est la droite d'intersection des plans (MNP) et (ADE)

b/ Dans le cube les faces (ABF) et (DCG) sont parallèles.

- le plan (MNP) coupe le plan (ABF) suivant la droite (NP).

- D'après la règle d'incidence, le plan (MNP) coupe le plan (DCG) suivant une droite parallèle à la droite (NP).

- De plus le point M appartient aux deux plans (MNP) et (DCG)

Donc les deux plans sont sécants suivant la parallèle à (NP) passant par M. Elle coupe (GC) en L.

c/ • $S \in (NP)$ et $(NP) \subset (MNP)$ donc $S \in (MNP)$

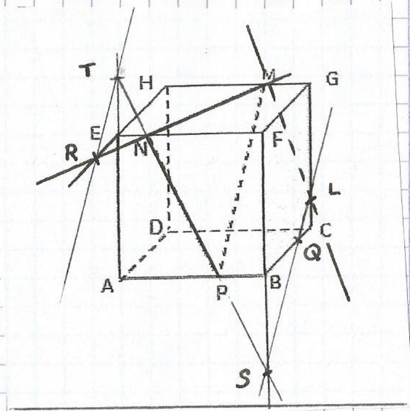
$S \in (FB)$ et $(FB) \subset (FBC)$ donc $S \in (FBC)$

donc $S \in (MNP) \cap (FBC)$.

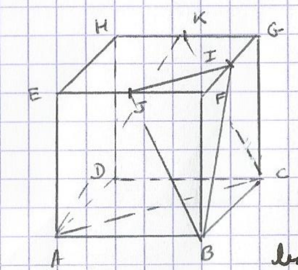
- on prouve de même que le point $L \in (MNP) \cap (FBC)$

donc l'intersection des plans (MNP) et (FBC) est la droite (LS)

d) La section du cube par le plan (MNP) est le polygone : MNPQLM.



e/



- Dans le triangle EFG
  - I milieu de [FG]
  - J milieu de [EF]

d'après le théorème des milieux. (IJ) // (EG)

- Dans le cube les diagonales [EG] et [AC]

les faces opposées EFGH et ABCD sont parallèles donc (EG) // (AC)

donc (IJ) // (AC).

de plus (CK) // (JB)

$\begin{cases} \text{les droites (IJ) et (JB) sont sécantes en J} \\ \text{les droites (CK) et (AC) sont sécantes en C} \end{cases}$

donc deux droites sécantes du plan (IJB) sont parallèles à deux droites sécantes de (ACK) donc les plans (IJB) et (ACK) sont parallèles.

4