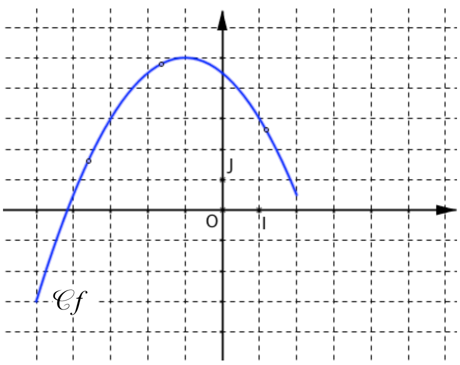
Nom : *Classe* : T ES	**Devoir surveillé n°3** le 23/11/2015	*Note* : … / 20

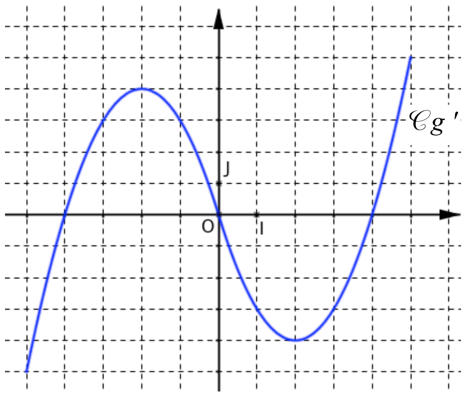
La notation du devoir prendra en compte les efforts de soin, de présentation et de rédaction.
Une fois que vous aurez fini ce devoir vous complèterez la grille d'autoévaluation suivante.

	Avis de l'élève		*Avis du professeur*	
Je sais :	***Oui***	***Non***	***Oui***	***Non***
Exercice 1				
Déterminer graphiquement la convexité d'une fonction :				
• À partir de sa représentation graphique.				
• À partir de la représentation graphique de sa fonction dérivée.				
• À partir de la représentation graphique de sa fonction dérivée seconde.				
Exercice 2				
Justifier qu'une fonction est continue.				
Dériver une fonction.				
Déterminer les racines d'un polynôme du 2^{nd} degré.				
Dresser un tableau des signes.				
Dresser un tableau des variations.				
Justifier qu'une équation admet une solution unique sur un intervalle.				
Déterminer l'encadrement d'une solution d'équation pour une précision donnée.				
Exercice 3				
Déterminer le sens de variation d'une fonction.				
Calculer la dérivée seconde d'une fonction polynôme.				
Déterminer algébriquement la convexité d'une fonction.				
Déterminer l'équation d'une tangente.				
Justifier la position relative d'une courbe et d'une tangente sur un intervalle donné.				

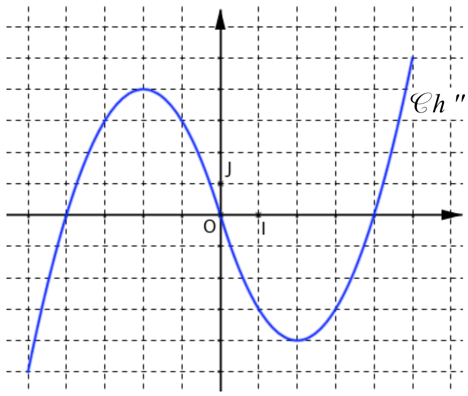
Exercice 1 : Etude graphique de la convexité d'une fonction. **… / 3**



a) La représentation graphique ci-dessus est celle d'une fonction f. Détermine graphiquement si cette fonction f est convexe ou concave. Précise sur quel intervalle.



b) La représentation graphique ci-dessus est celle de la dérivée g' d'une fonction g. Détermine graphiquement les intervalles sur lesquels cette fonction g est convexe ou concave.



c) La représentation graphique ci-dessus est celle de la dérivée seconde h'' d'une fonction h. Détermine graphiquement les intervalles sur lesquels cette fonction h est convexe ou concave.

Exercice 2 : … / 8

Une entreprise qui fabrique des cerfs-volants a modélisé son coût total de production, en milliers d'euros, par la fonction :

$$C_T(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+2$$

où x est la quantité produite, en milliers de cerfs-volants, avec $0 \leq x \leq 6$.

1) Justifie que la fonction C_T est continue sur [0 ; 6].

2) a) Calcule C'_T puis résous l'équation $C'_T = 0$.

b) Vérifie que pour tout réel x : $C'_T(x)=(x-1)(x+\frac{1}{2})$

c) Dresse le tableau des signes de C'_T sur $\mathbb{R}$ puis le tableau de variation de la fonction C_T sur [0 ; 6].

3) a) Justifie que l'équation $C_T(x) = 50$ admet une unique solution α sur l'intervalle [0 ; 6].

b) Utilise ta calculatrice pour déterminer un encadrement de α à 0,001 près.

c) L'entreprise ne peut pas dépasser un coût total de production de 50 000 €.
Quel nombre maximal de cerfs-volants peut-elle produire ?

Exercice 3 : … / 9

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x^2 - 20x + 24$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère.

1) Calcule $f'(x)$ et détermine le sens de variation de f.

2) Calcule $f''(x)$ et étudie la convexité de f.

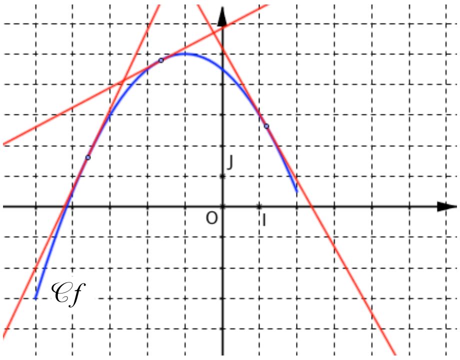
3) a) Détermine les équations des tangentes T_{-1} et T_1 à la courbe $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses respectives -1 et 1.

b) Justifie la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T_{-1} sur l'intervalle $]-\infty ; -\frac{2}{3}]$.

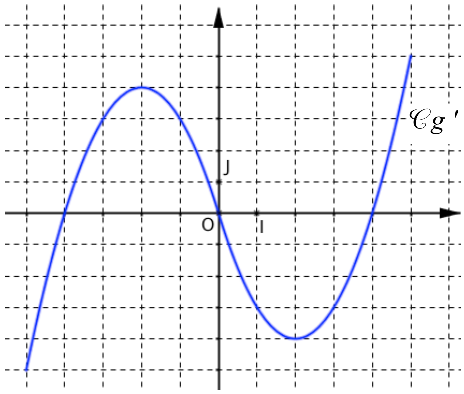
c) Justifie la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T_1 sur l'intervalle $]-\frac{2}{3} ; +\infty[$.

Correction du DS n°3

Exercice 1 : Etude graphique de la convexité d'une fonction.

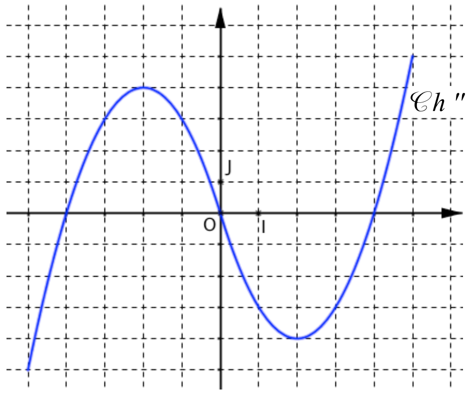


a) On observe que la courbe $\mathscr{C}f$ reste toujours en dessous des tangentes que l'on peut tracer.
f est donc concave sur [-5 ; 2].



b) En observant les variations de la fonction dérivée g' on peut dresser le tableau suivant :

x	-5	-2	2	5
g'	↗	↘	↗	
g	convexe	concave	convexe	



c) En observant les changements de signe de la fonction dérivée seconde h'' on peut dresser le tableau suivant :

x	-5		-4		0		4		5
h''		–	0	+	0	–	0	+	
h		concave		convexe		concave		convexe	

Exercice 2 :

Une entreprise qui fabrique des cerfs-volants a modélisé son coût total de production, en milliers d'euros, par la fonction :

$$C_T(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+2$$

où x est la quantité produite, en milliers de cerfs-volants, avec $0 \leq x \leq 6$.

1) La fonction C_T est continue sur [0 ; 6] car c'est une fonction polynôme.

2) a) $\forall x \in \mathbb{R}, C'_T(x)=\frac{3}{3}x^2-\frac{2}{4}x-\frac{1}{2}=x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

On calcule le discriminant : $\Delta=b^2-4ac=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{4}{2}=\frac{1}{4}+\frac{8}{4}=\frac{9}{4}>0$

On en déduit deux racines distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}}}{2}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2}=\frac{-\frac{2}{2}}{2}=-\frac{1}{2}$ et : $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}}}{2}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2}=\frac{\frac{4}{2}}{2}=\frac{2}{2}=1$

Donc : $C'_T=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ ou $x=1$.

b) Vérifie que pour tout réel x : $C'_T(x)=(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)=x^2+\frac{1}{2}x-x-\frac{1}{2}=x^2+\frac{1}{2}x-\frac{2}{2}x-\frac{1}{2}=x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=C'_T(x)$

c) Dresse le tableau des signes de C'_T sur $\mathbb{R}$ puis le tableau de variation de la fonction C_T sur [0 ; 6].

Tableau des signes de C'_T sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		–		–	0	+	
$x+\frac{1}{2}$		–	0	+		+	
$C'_T(x)=(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$		+	0	–	0	+	

On en déduit le tableau des variations de C_T sur [0 ; 6] :

x	0		1		6
$C'_T(x)$		–	0	+	
$C_T(x)$	2	↘	$\frac{19}{12}$	↗	62

Les valeurs de $C_T(0)$ et $C_T(6)$ sont données par le tableur de la calculatrice. La valeur exacte de $C_T(1)$ doit être calculée :

$C_T(1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+2=\frac{4}{12}-\frac{3}{12}-\frac{6}{12}+\frac{24}{12}=\frac{19}{12}$

3) a) Justifie que l'équation $C_T(x) = 50$ admet une unique solution α sur l'intervalle [0 ; 6].

La fonction C_T est continue et strictement décroissante sur [0 ; 1].
Son maximum sur [0 ; 1] est $C_T(0) = 2$.
Donc l'équation $C_T(x) = 50$ n'admet aucune solution sur l'intervalle [0 ; 1].

La fonction C_T est continue et strictement croissante sur [1 ; 6].
$\forall x \in [1 ; 6], C_T(x) \in [\frac{19}{12} ; 62]$
Or $50 \in [\frac{19}{12} ; 62]$.
Donc l'équation $C_T(x) = 50$ admet une unique solution α sur l'intervalle [1 ; 6].
Finalement, l'équation $C_T(x) = 50$ admet une unique solution α sur l'intervalle [0 ; 6].

b) Utilise ta calculatrice pour déterminer un encadrement de α à 0,001 près.
Avec la calculatrice, on trouve :

- $C_T(5) \approx 34{,}9$ et $C_T(6) = 62$. Donc $5 < \alpha < 6$.
- $C_T(5{,}6) \approx 49{,}9$ et $C_T(5{,}7) \approx 52{,}8$. Donc $5{,}6 < \alpha < 5{,}7$.
- $C_T(5{,}60) \approx 49{,}9$ et $C_T(5{,}61) \approx 50{,}2$. Donc $5{,}60 < \alpha < 5{,}61$.
- $C_T(5{,}603) \approx 49{,}98$ et $C_T(5{,}604) \approx 50{,}01$. Donc $5{,}603 < \alpha < 5{,}604$.

c) L'entreprise ne peut pas dépasser un coût total de production de 50 000 €.
Quel nombre maximal de cerfs-volants peut-elle produire ?
La fonction C_T étant strictement croissante sur [1 ; 6] et le coût total de production ne pouvant dépasser 50 milliers d'euros, le nombre maximal de cerfs-volants pouvant être produits correspond à la solution α de $C_T(x) = 50$.
$5{,}603 < \alpha < 5{,}604$ et les quantités x produites sont exprimées en milliers d'unités. De plus $C_T(5{,}604) > 50$.
Donc l'entreprise pourra fabriquer au maximum 5 603 cerfs-volants.

Exercice 3 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x^2 - 20x + 24$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative.

1) Calcule $f'(x)$ et détermine le sens de variation de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 + 4x - 20$
Pour étudier les variations de f il faut étudier le signe de f'.
On considère le trinôme du 2nd degré $3x^2 + 4x - 20$ et on calcule son discriminant.
$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 3 \times (-20) = 16 + 240 = 256 > 0$
Le trinôme admet donc 2 racines distinctes :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{256}}{6} = \frac{-4-16}{6} = -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+16}{6} = \frac{12}{6} = 2$
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = 3(x+\frac{10}{3})(x-2)$

On en déduit le tableau des signes de f' sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$-\frac{10}{3}$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\frac{10}{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x) = 3(x+\frac{10}{3})(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Puis le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$-\frac{10}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2048}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) Calcule $f''(x)$ et étudie la convexité de f.

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 + 4x - 20$
$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 6x + 4$
Pour étudier la convexité de f il faut étudier le signe de f''.

$6x + 4 > 0$
$6x > -4$
$x > -\frac{4}{6}$
$x > -\frac{2}{3}$

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		concave		concave	

3) a) Détermine les équations des tangentes T_{-1} et T_1 à la courbe $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses respectives - 1 et 1.

$f(-1)=(-1)^3+2\times(-1)^2-20\times(-1)+24=-1+2+20+24=45$
$f'(-1)=3\times(-1)^2+4\times(-1)-20=3-4-20=-21$

L'équation de T_{-1} est : $y=f'(-1)\,(x-(-1))+f(-1)$
$y=-21\,(x+1)+45$
$y=-21\,x-21+45$
$y=-21\,x+24$

$f(1)=1^3+2\times1^2-20\times1+24=1+2-20+24=7$
$f'(1)=3\times1^2+4\times1-20=3+4-20=-13$

L'équation de T_1 est : $y=f'(1)\,(x-1)+f(1)$
$y=-13\,(x-1)+7$
$y=-13\,x+13+7$
$y=-13\,x+20$

b) Justifie la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T_{-1} sur l'intervalle $]-\infty\,;-\frac{2}{3}]$.

On sait que f est concave sur $]-\infty\,;-\frac{2}{3}]$ et que : $-1\in]-\infty\,;-\frac{2}{3}]$.

Donc $\mathscr{C}$ est en dessous de T_{-1} sur $]-\infty\,;-\frac{2}{3}]$.

c) Justifie la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T_1 sur l'intervalle $]-\frac{2}{3}\,;+\infty[$.

On sait que f est convexe sur $]-\frac{2}{3}\,;+\infty[$ et que : $1\in]-\frac{2}{3}\,;+\infty[$.

Donc $\mathscr{C}$ est au dessus de T_1 sur $]-\frac{2}{3}\,;+\infty[$.