Nom : *Classe* : T ES 2	**Devoir surveillé n°3** le 19/12/2019	*Note* : … / 20

	Evaluation des capacités
	Non → Oui
Réussir convenablement des exercices déjà travaillés en classe.	
Déterminer graphiquement des réponses à des questions dans un contexte donné.	
Déterminer le résultat calculé à la fin d'un algorithme.	
Calculer.	
Etudier les variations d'une fonction.	
Justifier qu'une équation admet une unique solution sur un intervalle / Approcher cette solution.	
Interpréter des résultats dans un contexte donné.	
Bonus : Déterminer la convexité d'une fonction et interpréter les résultats obtenus.	

Exercices contrôlés :

Exercice 1 : **… / 5,5**

1. En 1988, le prix moyen au 1er janvier du kilo de chou-fleur était d'environ 1 € en France métropolitaine. Chaque année ce prix a augmenté en moyenne de $3,1$ %. On note p_n le prix moyen du kilo de chou-fleur à l'année $1998 + n$. A l'aide d'un tableur on obtient les données suivantes :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
2	Prix (kg)	1	1,031	1,063	1,096	1,130	1,165	1,201	1,238	1,277

a) Retrouver par le calcul le résultat obtenu en C2.

b) Préciser la formule saisie en C2 pour être recopiée vers la droite.

c) Montrer que la suite (p_n) est géométrique, préciser sa raison et son terme initial.

d) Exprimer p_n en fonction de n.

e) Qu'affichera le tableur pour l'année 2015 ?

2. a) Modéliser le prix moyen du kilo de chou-fleur à l'année $1998 + x$ par une fonction exponentielle, notée p, prolongeant (p_n).

b) Calculer $p(18,5)$. Interpréter le résultat dans le contexte étudié.

Exercice 2 : Développer puis réduire : **… / 1,5**

a) $e^{-x}\,(e^x - 1)$ b) $(e^x + 1)(2\,e^x - 2)$

Exercice 3 : Dériver les fonctions suivantes : **… / 3**

a) $f(x) = (x^2 + 2x - 4)\,e^x$ b) $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x}$

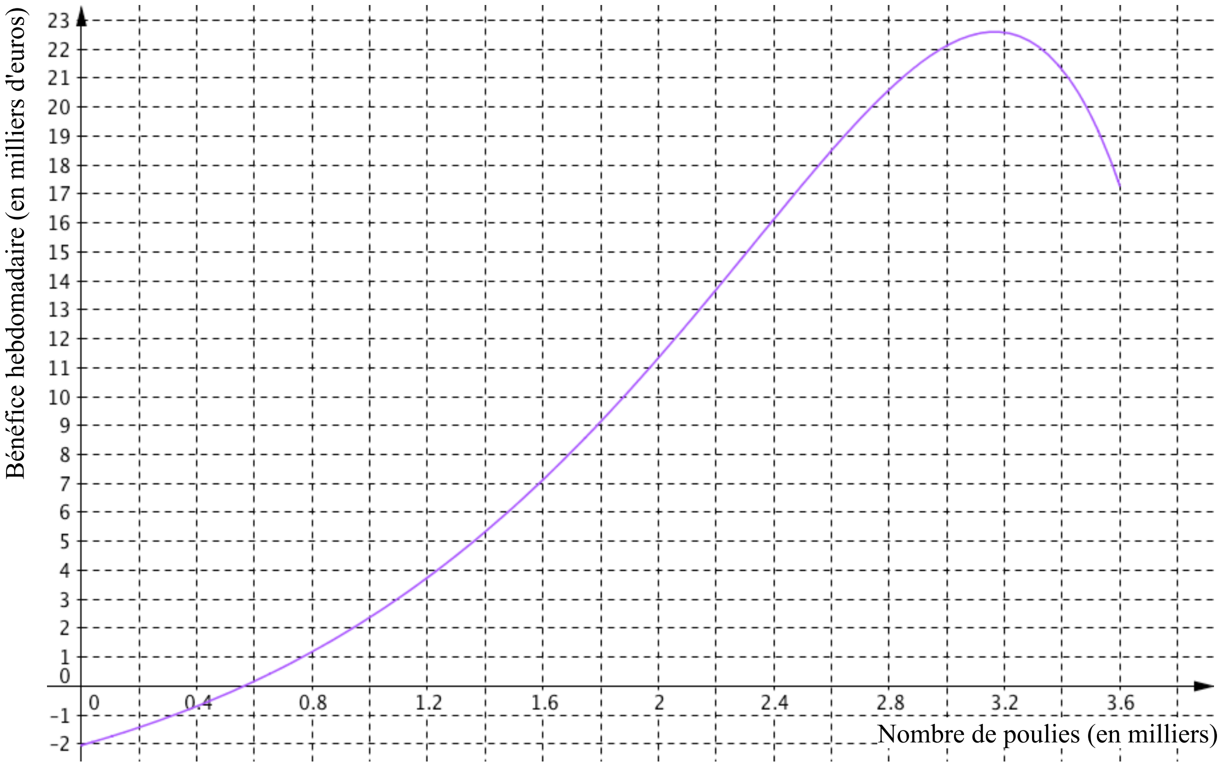
Exercice 4 : **… / 10**

Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile. On suppose que toute la production est vendue. L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 3 600 poulies par semaine. On note x le nombre de milliers de poulies fabriquées et vendues en une semaine. Ainsi, x varie dans l'intervalle $[\,0\,;\,3,6\,]$. Le bénéfice hebdomadaire, exprimé en milliers d'euros, est noté $B(x)$. L'objet de cet exercice est d'étudier ce bénéfice.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A : Etude graphique

La représentation graphique de la fonction bénéfice B est donnée ci-dessous :



Pour chaque question posée, rédiger une réponse sur votre copie et faire apparaitre les traits de construction utiles à la compréhension du raisonnement sur le graphique. Les résultats seront donnés à cent poulies près ou à cent euros près selon les cas.

1. Combien l'entreprise doit-elle fabriquer et vendre de poulies pour que le bénéfice réalisé soit supérieur ou égal à 20 000 euros ?
2. Quel est le bénéfice maximum envisageable pour cette entreprise ? Donner une estimation du nombre N de poulies à produire et à vendre pour atteindre cet objectif.
3. Lorsque le bénéfice est négatif, on dit que l'entreprise est déficitaire. Donner une estimation du nombre minimum de poulies à produire et à vendre pour que l'entreprise ne soit pas déficitaire.

Partie B : Etude théorique

Le bénéfice hebdomadaire noté $B(x)$, exprimé en milliers d'euros est défini sur $[\,0\,;\,3,6\,]$ par :

$$B(x) = -5 + (4 - x)\,e^{\,1,2x-0,3}$$

1. a) Calculer $B(0)$, à 10^{-3} près, et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

   b) On donne l'algorithme suivant :

```
X ← 0
B ← -2,037
Tant que B ≤ 0
    X ← X + 0,001
    B ← -5 + (4 − X) e^(1,2 X−0,3)
Fin Tant que
```

   Quelle est la valeur de X calculée à la fin de l'algorithme ?

2. a) Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[\,0\,;\,3,6\,]$, on a : $B'(x) = (3,8 - 1,2\,x)\,e^{1,2x-0,3}$

   b) Déterminer le signe de la fonction B' sur l'intervalle $[\,0\,;\,3,6\,]$.

   c) Dresser le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[\,0\,;\,3,6\,]$.
   On indiquera les valeurs de la fonction B, au millième près, aux bornes de l'intervalle.

3. a) Justifier que l'équation $B(x) = 20$ admet deux solutions distinctes α et β sur l'intervalle $[\,0\,;\,3,6\,]$.

   b) Déterminer une valeur arrondie de chacune à 10^{-3} près en arrondissant α par excès et β par défaut.

4. A l'aide des résultats calculés précédemment, déterminer les réponses exactes aux questions de la partie A.

5. **Question Bonus**: **… / 3**
   Un logiciel de calcul formel a permis d'établir les résultats ci-dessous :

B(x):=−5+(4−x)exp(1.2x−0.3)
→ $\mathbf{B(x) := e^{\frac{6}{5}x-\frac{3}{10}}\,(-x+4)-5}$
B'(x)
→ $\frac{1}{5}\left(19\,e^{\frac{6}{5}x-\frac{3}{10}} - 6\,x\,e^{\frac{6}{5}x-\frac{3}{10}}\right)$
B"(x)
→ $\frac{1}{25}\left(84\,e^{\frac{6}{5}x-\frac{3}{10}} - 36\,x\,e^{\frac{6}{5}x-\frac{3}{10}}\right)$

   a) En admettant les résultats fournis par le logiciel, justifier que, pour tout réel x de $[\,0\,;\,3,6\,]$:

$$B''(x) = \frac{-12\,(3\,x-7)\,e^{\,1,2\,x-0,3}}{25}$$

   b) Etudier la convexité de la fonction B sur $[\,0\,;\,\frac{19}{6}\,]$.

   c) On admet que la vitesse de progression du bénéfice B dépend du sens de variation de sa dérivée B' :
   - Lorsque la dérivée est croissante la progression s'accélère.
   - Tandis que lorsque la dérivée est décroissante la progression ralentit.

   Utiliser les résultats obtenus à la question précédente pour décrire la progression du bénéfice.

Correction du DS n°3

Exercices contrôlés : Voir les corrections des exercices du livre :

- p 75 n° 35
- p 75 n° 38
- p 76 n° 51 et 52

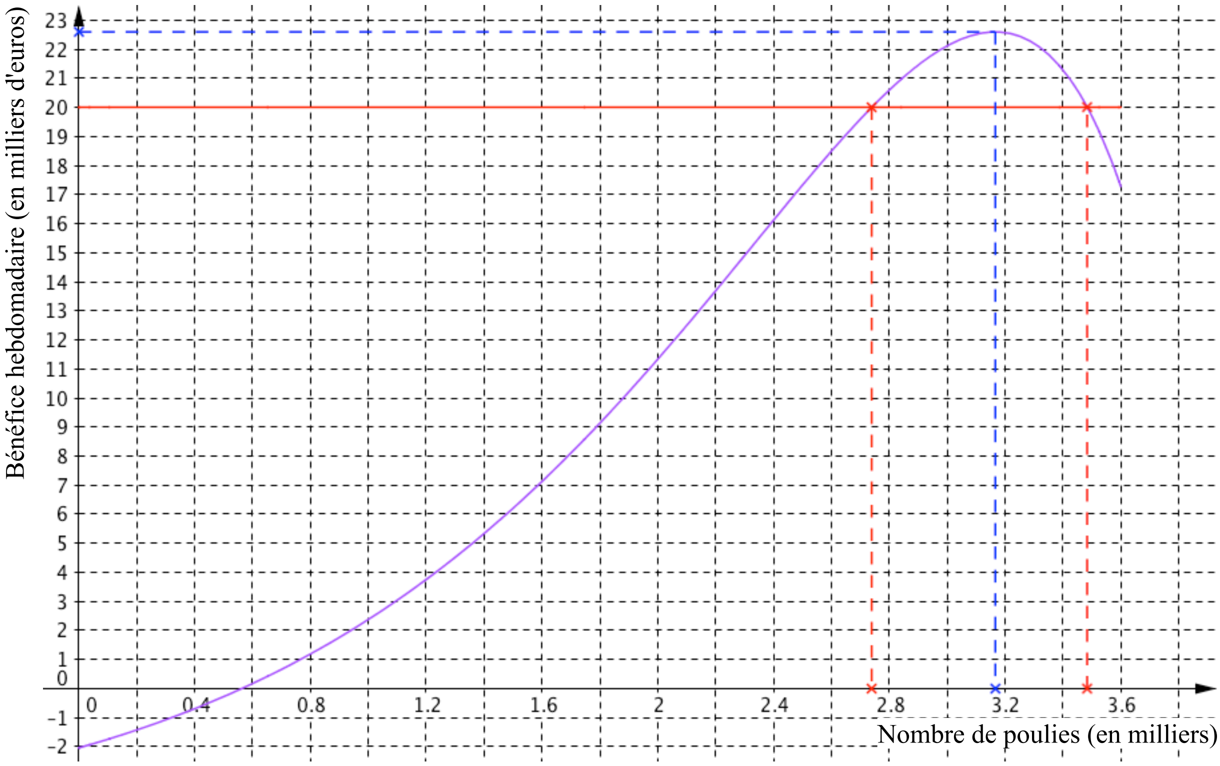
Exercice 4 :

Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile. On suppose que toute la production est vendue. L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 3 600 poulies par semaine. On note x le nombre de milliers de poulies fabriquées et vendues en une semaine. Ainsi, x varie dans l'intervalle $[0\ ;\ 3,6]$. Le bénéfice hebdomadaire, exprimé en milliers d'euros, est noté $B(x)$. L'objet de cet exercice est d'étudier ce bénéfice.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A : Etude graphique

La représentation graphique de la fonction bénéfice B est donnée ci-dessous :



Pour chaque question posée, rédiger une réponse sur votre copie et faire apparaitre les traits de construction utiles à la compréhension du raisonnement sur le graphique. Les résultats seront donnés à cent poulies près ou à cent euros près selon les cas.

1. Combien l'entreprise doit-elle fabriquer et vendre de poulies pour que le bénéfice réalisé soit supérieur ou égal à 20 000 euros ?

Graphiquement, le bénéfice est supérieur ou égal à 20 000 euros lorsque le nombre de poulies fabriquées et vendues est compris entre 2 700 et 3 500.

2. Quel est le bénéfice maximum envisageable pour cette entreprise ? Donner une estimation du nombre N de poulies à produire et à vendre pour atteindre cet objectif.

Graphiquement, le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise est d'environ 22 500 €. Il semble atteint lorsque l'entreprise fabrique et vend environ 3 200 poulies.

3. Lorsque le bénéfice est négatif, on dit que l'entreprise est déficitaire. Donner une estimation du nombre minimum de poulies à produire et à vendre pour que l'entreprise ne soit pas déficitaire.

Pour ne pas être déficitaire l'entreprise doit produire et vendre environ 600 poulies.

Partie B : Etude théorique

Le bénéfice hebdomadaire noté $B(x)$, exprimé en milliers d'euros est défini sur $[0\ ;\ 3,6]$ par :

$$B(x) = -5 + (4-x)\, e^{1,2x-0,3}$$

1. a) Calculer $B(0)$, à 10^{-3} près, et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

$B(0) = -5 + (4-0)e^{1,2\times 0-0,3} = -5 + 4e^{-0,3} \approx -2,037$ Cela signifie que lorsque l'entreprise ne vend aucune poulie, elle perd $2\,037$ euros par semaine.

b) On donne l'algorithme suivant :

```
X ← 0
B ← -2,037
Tant que B ≤ 0
    X ← X + 0,001
    B ← -5 + (4 − X) e^(1,2 X − 0,3)
Fin Tant que
```

Quelle est la valeur de X calculée à la fin de l'algorithme ?

L'algorithme permet d'afficher la plus petite valeur de X, au millième près, à partir de laquelle le bénéfice B devient strictement supérieur à 0. Le résultat affiché en sortie est $X = 0,563$.

2. a) Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 3,6]$, on a : $B'(x) = (3,8-1,2\,x)\, e^{1,2x-0,3}$

$\forall\, x \in [0\ ;\ 3,6]$, $B(x) = -5 + (4-x)\, e^{1,2x-0,3} = -5 + u(x)\, v(x)$

Donc : $B'(x) = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = 4-x \\ v(x) = e^{1,2x-0,3} \end{cases}$ et : $\begin{cases} u'(x) = -1 \\ v'(x) = 1,2e^{1,2x-0,3} \end{cases}$

$$B'(x) = -1 \times e^{1,2x-0,3} + (4-x)\times 1,2\, e^{1,2x-0,3} = -1\, e^{1,2x-0,3} + (4,8-1,2x)\, e^{1,2x-0,3}$$

$$B'(x) = (-1 + 4,8 - 1,2x)\, e^{1,2x-0,3} = (3,8-1,2x)\, e^{1,2x-0,3}$$

b) Déterminer le signe de la fonction B' sur l'intervalle $[0\ ;\ 3,6]$.

$\forall\, x \in [0\ ;\ 3,6]$, $B'(x) = (3,8-1,2\,x)\, e^{1,2x-0,3}$

$\forall\, x \in [0\ ;\ 3,6]$, $e^{1,2x-0,3} > 0$

On en déduit que $B'(x)$ a le même signe que $3,8-1,2x$.

Or : $3,8-1,2x > 0 \iff 3,8 > 1,2x \iff x < \dfrac{3,8}{1,2} \iff x < \dfrac{19}{6}$

Ainsi, la fonction B' est positive sur l'intervalle $[0\ ;\ \frac{19}{6}]$ et négative sur l'intervalle $[\frac{19}{6}\ ;\ 3,6]$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0\ ;\ 3,6]$.
On indiquera les valeurs de la fonction B, au millième près, aux bornes de l'intervalle.

$B(0) \approx -2,037$ $\qquad B(\frac{19}{6}) \approx 22,596$ $\qquad B(3,6) \approx 17,280$

On en déduit le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0\ ;\ 3,6]$:

x	0		$\frac{19}{6}$		$3,6$
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	$-2,037$	$\nearrow$	$22,596$	$\searrow$	$17,280$

3. a) Justifier que l'équation $B(x) = 20$ admet deux solutions distinctes α et β sur l'intervalle $[0\ ;\ 3{,}6]$.

Sur l'intervalle $[0\ ;\ \frac{19}{6}]$, on sait que :

- La fonction B est continue et strictement croissante.
- $\forall\ x \in [0\ ;\ \frac{19}{6}]$, $B(x) \in [-2{,}037\ ;\ 22{,}596]$
- $20 \in [-2{,}037\ ;\ 22{,}596]$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $B(x) = 20$ admet une unique solution α sur $[0\ ;\ \frac{19}{6}]$.

De même, sur l'intervalle $[\frac{19}{6}\ ;\ 3{,}6]$ puisque :

- B est continue et strictement décroissante.
- $\forall\ x \in [\frac{19}{6}\ ;\ 3{,}6]$, $B(x) \in [17{,}280\ ;\ 22{,}596]$
- $20 \in [17{,}280\ ;\ 22{,}596]$

Alors, l'équation $B(x) = 20$ admet une unique solution β sur l'intervalle $[\frac{19}{6}\ ;\ 3{,}6]$.
Finalement, l'équation $B(x) = 20$ admet deux solutions distinctes sur l'intervalle $[0\ ;\ 3{,}6]$.

b) Déterminer une valeur arrondie de chacune à 10^{-3} près en arrondissant α par excès et β par défaut.

En utilisant la méthode de balayage et le tableur de la calculatrice on obtient :

$$\alpha \approx 2{,}740 \quad \text{et} \quad \beta \approx 3{,}484$$

4. A l'aide des résultats calculés précédemment, déterminer les réponses exactes aux questions de la partie A.

a) Des résultats obtenus à la question 3, on en déduit que pour réaliser un bénéfice supérieur à 20 000 euros l'entreprise doit vendre entre 2 740 et 3 484 poulies chaque semaine.

b) $\frac{19}{6} \approx 3{,}167$. Ainsi, du tableau de variation obtenu à la question 2.c, on en déduit que l'entreprise va réaliser un bénéfice maximum de 22 596 euros si elle vend 3 167 poulies chaque semaine.

c) Du résultat obtenu à la question 1.c, on en déduit que l'entreprise doit produire et vendre au moins 563 poulies chaque semaine pour ne pas être déficitaire.

5. Un logiciel de calcul formel a permis d'établir les résultats ci-dessous :

B(x):=-5+(4-x)exp(1.2x-0.3)

$\rightarrow \mathbf{B(x) := e^{\frac{6}{5}x-\frac{3}{10}}\,(-x+4)-5}$

B'(x)

$\rightarrow \frac{1}{5}\left(19\, e^{\frac{6}{5}x-\frac{3}{10}} - 6\, x\, e^{\frac{6}{5}x-\frac{3}{10}}\right)$

B''(x)

$\rightarrow \frac{1}{25}\left(84\, e^{\frac{6}{5}x-\frac{3}{10}} - 36\, x\, e^{\frac{6}{5}x-\frac{3}{10}}\right)$

a) En admettant les résultats fournis par le logiciel, justifier que, pour tout réel x de $[0\ ;\ 3{,}6]$:

$$B''(x) = \frac{-12\,(3\,x-7)\,e^{1{,}2\,x-0{,}3}}{25}$$

$$B''(x) = \frac{1}{25}\left(84\,e^{\frac{6}{5}x-\frac{3}{10}} - 36\,x\,e^{\frac{6}{5}x-\frac{3}{10}}\right)$$

$$B''(x) = \frac{1}{25}\left(84\,e^{1{,}2\,x-0{,}3} - 36\,x\,e^{1{,}2\,x-0{,}3}\right)$$

$$B''(x) = \frac{1}{25}(84 - 36\,x)\,e^{1{,}2\,x-0{,}3}$$

$$B''(x) = \frac{1}{25}(12 \times 7 - 12 \times 3\,x)\,e^{1{,}2\,x-0{,}3}$$

$$B''(x) = \frac{-12}{25}(-7 + 3\,x)\,e^{1{,}2\,x-0{,}3}$$

$$B''(x) = \frac{-12\,(3\,x-7)\,e^{1{,}2\,x-0{,}3}}{25}$$

b) Etudier la convexité de la fonction B sur $[0\ ;\ \frac{19}{6}]$.

$\forall\, x \in [0\ ;\ \frac{19}{6}]$, $B''(x) = \frac{-12\,(3\,x-7)\,e^{1,2\,x-0,3}}{25}$

$25 > 0$ et $\forall\, x \in [0\ ;\ \frac{19}{6}]$, $e^{1,2x-0,3} > 0$

On en déduit que $B''(x)$ est du signe de -12 $(3x-7)$.

$3x-7>0 \;\Leftrightarrow\; 3x>7 \;\Leftrightarrow\; x>\frac{7}{3}$

On en déduit le tableau suivant :

x	0		$\frac{7}{3}$		$\frac{19}{6}$
-12		$-$		$-$	
$3x-7$		$-$	0	$+$	
$B''(x)$		$+$	0	$-$	
B		convexe		concave	

Ainsi, la fonction B est convexe sur $[0\ ;\ \frac{7}{3}]$ et concave sur $[\frac{7}{3}\ ;\ \frac{19}{6}]$.

c) On admet que la vitesse de progression du bénéfice B dépend du sens de variation de sa dérivée B' :

- Lorsque la dérivée est croissante la progression s'accélère.
- Tandis que lorsque la dérivée est décroissante la progression ralentit.

Utiliser les résultats obtenus à la question précédente pour décrire la progression du bénéfice.

La vitesse de progression du bénéfice B dépend du sens de variation de sa dérivée B' qui lui même dépend du signe de $B''(x)$.

$\forall\, x \in [0\ ;\ \frac{7}{3}]$, $B''(x) \geq 0$. On en déduit que la dérivée B' est croissante et que la progression du bénéfice B s'accélère sur cet intervalle.

Au contraire, la dérivée B' est décroissante sur $[\frac{7}{3}\ ;\ \frac{19}{6}]$ et la progression du bénéfice B ralentit.