Nom :	**DS n°3**	Le : 15/12/2022	Durée : 1h20
Classe : TMATHS1	Etude de fonctions		Note : … / 20

Partie A : étude de deux fonctions

On considère les deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[\,0\,;\,+\infty\,[$ par :

$$f(x) = 0,06(\text{-}x^2 + 13,7x) \text{ et } g(x) = (\text{-}0,15x + 2,2)e^{0,2x} - 2,2\,.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables et on note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.

1. On donne le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

x	0		$6,85$		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(6,85)$	$\searrow$	$-\infty$

   a) Justifier la limite de f en $+\infty$.

   b) Justifier les variations de la fonction f.

   c) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

2. a) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

   b) Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $[\,0\,;\,+\infty\,[$ on a : $g'(x) = (\text{-}0,03x + 0,29)e^{0,2x}$.

   c) Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$.
   Préciser une valeur approchée à 10^{-2} près du maximum de g.

   d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle.

   e) On définit ci-dessous les fonctions g() et racine() en Python.

```python
from math import exp

def g(x):
    return (-0.15*x+2.2)*exp(0.2*x)-2.2

def racine(n):
    p=10**(-n)
    x=p
    while g(x)>0:
        x=x+p
    return round(x,n)
```

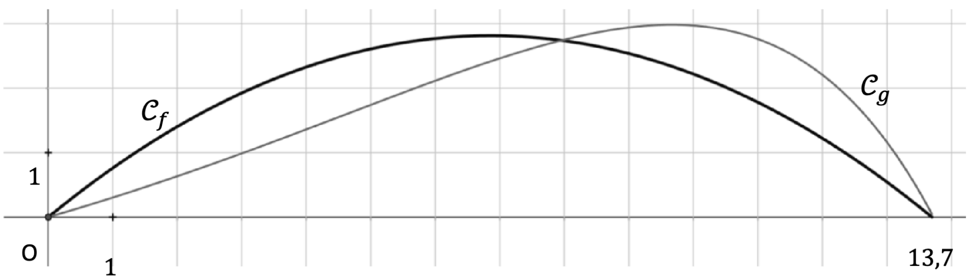
   Déterminer et interpréter le résultat obtenu en tapant racine(2) dans la console Python.

Partie B : trajectoires d'une balle de golf

Pour frapper la balle, un joueur de golf utilise un instrument appelé « club » de golf.

On souhaite exploiter les fonctions f et g étudiées en **Partie A** pour modéliser de deux façons différentes la trajectoire d'une balle de golf. On suppose que le terrain est parfaitement plat.

On admettra ici que $13,7$ est la valeur qui annule la fonction f et une approximation de la valeur qui annule la fonction g. On donne ci-dessous les représentations graphiques de f et g sur l'intervalle $[\,0\,;\,13,7\,]$.

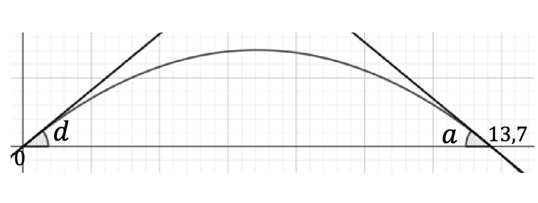
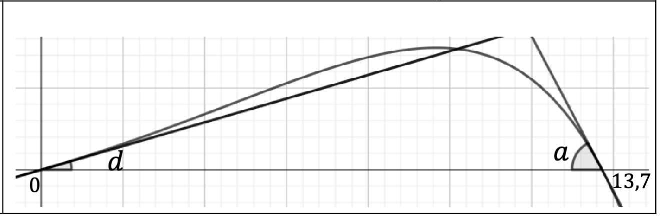


Pour x représentant la distance horizontale parcourue par la balle en dizaine de yards après la frappe, (avec $0 \leq x \leq 13,7$), $f(x)$ (ou $g(x)$ selon le modèle) représente la hauteur correspondante de la balle par rapport au sol, en dizaine de yards (1 yard correspond à environ $0,914$ mètre).

On appelle « angle de décollage » de la balle, l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe ($\mathscr{C}f$ ou $\mathscr{C}g$ selon le modèle) en son point d'abscisse 0. Une mesure de l'angle de décollage de la balle est un nombre réel d tel que $tan(d)$ est égal au coefficient directeur de cette tangente.

De même, on appelle « angle d'atterrissage » de la balle, l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe ($\mathscr{C}f$ ou $\mathscr{C}g$ selon le modèle) en son point d'abscisse $13,7$. Une mesure de l'angle d'atterrissage de la balle est un nombre réel a tel que $tan(a)$ est égal à l'opposé du coefficient directeur de cette tangente.

Tous les angles sont mesurés en degré.

Le schéma illustre les angles de décollage et d'atterrissage associés à la courbe C_f.	Le schéma illustre les angles de décollage et d'atterrissage associés à la courbe C_g.
	

1. Première modélisation : on rappelle qu'ici, l'unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $f(x)$ la hauteur correspondante de la balle.
   Selon ce modèle :

   a) Quelle est la hauteur maximale, en yard, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire ?

   b) Vérifier que $f'(0) = 0,822$.

   c) Donner une mesure en degré de l'angle de décollage de la balle, arrondie au dixième.
   (On pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous).

   d) Quelle propriété graphique de la courbe $\mathscr{C}f$ permet de justifier que les angles de décollage et d'atterrissage de la balle sont égaux ?

2. Seconde modélisation : on rappelle qu'ici, l'unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $g(x)$ la hauteur correspondante de la balle.
   Selon ce modèle :

   a) Quelle est la hauteur maximale, en yard, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire ?

   On précise que $g'(0) = 0,29$ et $g'(13,7) \approx$ -$1,87$.

   b) Donner une mesure en degré de l'angle de décollage de la balle, arrondie au dixième.
   (On pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous).

   c) Justifier que 62 est une valeur approchée, arrondie à l'unité près, d'une mesure en degré de l'angle d'atterrissage de la balle.

   Tableau : extrait d'une feuille de calcul donnant une mesure en degré d'un angle quand on connait sa tangente

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	tan(θ)	0,815	0,816	0,817	0,818	0,819	0,82	0,821	0,822	0,823	0,824	0,825	0,826
2	θ en degrés	39,18	39,21	39,25	39,28	39,32	39,35	39,39	39,42	39,45	39,49	39,52	39,56
3													
4	tan(θ)	0,285	0,286	0,287	0,288	0,289	0,29	0,291	0,292	0,293	0,294	0,295	0,296
5	θ en degrés	15,91	15,96	16,01	16,07	16,12	16,17	16,23	16,28	16,33	16,38	16,44	16,49

Partie C : interrogation des modèles

À partir d'un grand nombre d'observations des performances de joueurs professionnels, on a obtenu les résultats moyens suivants

Angle de décollage en degré	Hauteur maximale en yard	Angle d'atterrissage en degré	Distance horizontale en yard au point de chute
24	**32**	**52**	**137**

Quel modèle, parmi les deux étudiés précédemment, semble le plus adapté pour décrire la frappe de la balle par un joueur professionnel ? La réponse sera justifiée.

Correction du DS n°3

Partie A : étude de deux fonctions

On considère les deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[\,0\,;\,+\infty\,[$ par :

$$f(x) = 0,06(\text{-}x^2 + 13,7x) \text{ et } g(x) = (\text{-}0,15x + 2,2)e^{0,2x} - 2,2\,.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables et on note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.

1. On donne le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[\,0\,;\,+\infty\,[$.

x	0		$6,85$		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(6,85)$	$\searrow$	$\text{-}\infty$

a) Justifier la limite de f en $+\infty$.

$\forall\, x \in [\,0\,;\,+\infty\,[$, $f(x) = 0,06(\text{-}x^2 + 13,7x)$
La limite en l'infini d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré.
Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \text{-}0,06x^2 = \text{-}\infty$ car $\text{-}0,06 < 0$

b) Justifier les variations de la fonction f.

$\forall\, x \in [\,0\,;\,+\infty\,[$, $f(x) = 0,06(\text{-}x^2 + 13,7x)$
Donc $f'(x) = 0,06(\text{-}2x + 13,7)$
$0,06 > 0$ et $\text{-}2x + 13,7 > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{13,7}{2} \Leftrightarrow x < 6,85$
On en déduit que $\forall\, x \in [\,0\,;\,6,85\,[$, $f'(x) > 0$ et que $\forall\, x \in \,]\,6,85\,;\,+\infty\,[$, $f'(x) < 0$
Ainsi, f est croissante sur $[\,0\,;\,6,85\,]$ puis décroissante sur $[\,6,85\,;\,+\infty\,[$.

c) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 0,06(\text{-}x^2 + 13,7x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \text{-}x^2 + 13,7x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(\text{-}x + 13,7) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ ou $x = 13,7$

2. a) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

$\forall\, x \in [\,0\,;\,+\infty\,[$, $g(x) = (\text{-}0,15x + 2,2)e^{0,2x} - 2,2$
$\lim\limits_{x \to +\infty} 0,2x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ donc, par composée de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{0,2x} = +\infty$
De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{-}0,15x + 2,2 = \text{-}\infty$
On en déduit, par produit de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} (\text{-}0,15x + 2,2)e^{0,2x} = \text{-}\infty$
Puis, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} (\text{-}0,15x + 2,2)e^{0,2x} - 2,2 = \text{-}\infty$
Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \text{-}\infty$

b) Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $[\,0\,;\,+\infty\,[$ on a : $g'(x) = (\text{-}0,03x + 0,29)e^{0,2x}$.

$\forall\, x \in [\,0\,;\,+\infty\,[$, $g(x) = (\text{-}0,15x + 2,2)e^{0,2x} - 2,2 = u(x) \times v(x) - 2,2$
avec $u(x) = \text{-}0,15x + 2,2$ et $v(x) = e^{0,2x}$

Donc $g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$g'(x) = \text{-}0,15e^{0,2x} + (\text{-}0,15x + 2,2) \times 0,2e^{0,2x}$
$g'(x) = \text{-}0,15e^{0,2x} + (\text{-}0,03x + 0,44)e^{0,2x}$
$g'(x) = (\text{-}0,03x + 0,44 - 0,15)e^{0,2x}$
$g'(x) = (\text{-}0,03x + 0,29)e^{0,2x}$

c) Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations sur $[0\,;\,+\infty[$.
Préciser une valeur approchée à 10^{-2} près du maximum de g.

$\forall\, x \in [0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = (-0,03x + 0,29)e^{0,2x}$

$\forall\, x \in [0\,;\,+\infty[$, $e^{0,2x} > 0$ et $-0,03x + 0,29 > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{0,29}{0,03} \Leftrightarrow x < \dfrac{29}{3}$

Ainsi, g' est strictement positive sur $\left[0\,;\,\dfrac{29}{3}\right[$ et strictement négative sur $\left]\dfrac{29}{3}\,;\,+\infty\right[$.

On en déduit que g est croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{29}{3}\right]$ puis décroissante sur $\left[\dfrac{29}{3}\,;\,+\infty\right[$.

$g(0) = (-0,15 \times 0 + 2,2)e^{0,2\times 0} - 2,2 = 2,2e^0 - 2,2 = 2,2 \times 1 - 2,2 = 0$

On en déduit le tableau de variations de g :

<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>$\dfrac{29}{3}$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td>0 ↗</td><td>$g(\dfrac{29}{3})$</td><td>↘ $-\infty$</td></tr>
</table>

$g(\dfrac{29}{3}) = (-0,15 \times \dfrac{29}{3} + 2,2)e^{0,2\times\frac{29}{3}} - 2,2 \approx 2,98$

Ainsi, le maximum de g vaut environ $2,98$.

d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle.

- La fonction g est strictement croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{29}{3}\right]$ avec $g(0) = 0$.

Ainsi, la seule solution de $g(x) = 0$ sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{29}{3}\right]$ est $x = 0$. Cette solution est nulle.

- La fonction g est continue et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{29}{3}\,;\,+\infty\right[$

  $g(\dfrac{29}{3}) \approx 2,98 > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ donc g change de signe sur l'intervalle $\left[\dfrac{29}{3}\,;\,+\infty\right[$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $\left[\dfrac{29}{3}\,;\,+\infty\right[$.

e) On définit ci-dessous les fonctions g() et racine() en Python.

```
from math import exp

def g(x):
    return (-0.15*x+2.2)*exp(0.2*x)-2.2

def racine(n):
    p=10**(-n)
    x=p
    while g(x)>0:
        x=x+p
    return round(x,n)
```

Déterminer et interpréter le résultat obtenu en tapant racine(2) dans la console Python.

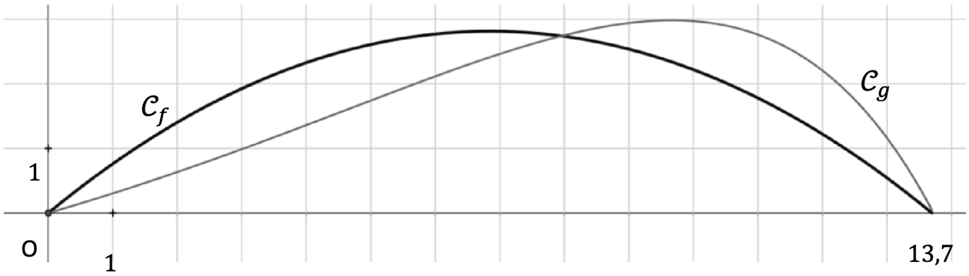
La fonction racine(n) renvoie la valeur approchée par excès à 10^{-n} près de la solution non nulle de l'équation $g(x) = 0$. En utilisant le menu Graphe ou le menu Table de la calculatrice on peut prévoir que racine(2) renvoie la valeur 13.73. Ainsi, $\alpha \approx 13,73$.

Partie B : trajectoires d'une balle de golf

Pour frapper la balle, un joueur de golf utilise un instrument appelé « club » de golf.

On souhaite exploiter les fonctions f et g étudiées en **Partie A** pour modéliser de deux façons différentes la trajectoire d'une balle de golf. On suppose que le terrain est parfaitement plat.

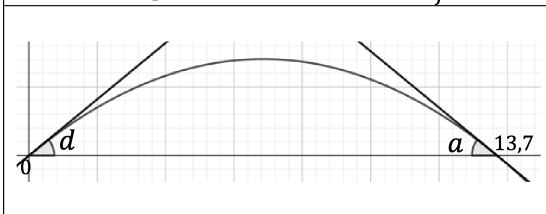
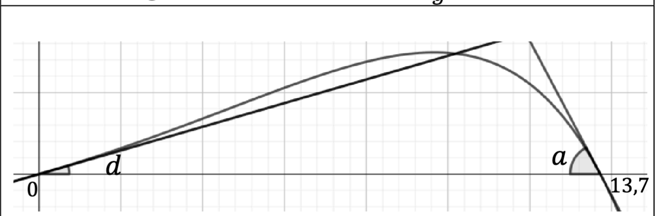
On admettra ici que $13,7$ est la valeur qui annule la fonction f et une approximation de la valeur qui annule la fonction g. On donne ci-dessous les représentations graphiques de f et g sur l'intervalle $[\,0\,;\,13,7\,]$.



Pour x représentant la distance horizontale parcourue par la balle en dizaines de yards après la frappe, (avec $0 \leq x \leq 13,7$), $f(x)$ (ou $g(x)$ selon le modèle) représente la hauteur correspondante de la balle par rapport au sol, en dizaines de yards (1 yard correspond à environ $0,914$ mètre).
On appelle « angle de décollage » de la balle, l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe ($\mathscr{C}f$ ou $\mathscr{C}g$ selon le modèle) en son point d'abscisse 0. Une mesure de l'angle de décollage de la balle est un nombre réel d tel que $tan(d)$ est égal au coefficient directeur de cette tangente.

De même, on appelle « angle d'atterrissage » de la balle, l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe ($\mathscr{C}f$ ou $\mathscr{C}g$ selon le modèle) en son point d'abscisse $13,7$. Une mesure de l'angle d'atterrissage de la balle est un nombre réel a tel que $tan(a)$ est égal à l'opposé du coefficient directeur de cette tangente.

Tous les angles sont mesurés en degré.

Le schéma illustre les angles de décollage et d'atterrissage associés à la courbe C_f.	Le schéma illustre les angles de décollage et d'atterrissage associés à la courbe C_g.
	

1. <u>Première modélisation</u> : on rappelle qu'ici, l'unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $f(x)$ la hauteur correspondante de la balle.
   Selon ce modèle :

   a) Quelle est la hauteur maximale, en yard, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire ?

f atteint son maximum M en $x = 6,85$ avec :
$M = f(6,85) = 0,06(\text{-}6,85^2 + 13,7 \times 6,85) \approx 2,82$
Ainsi, la hauteur maximale atteinte par la balle au cours de sa trajectoire, selon ce modèle, est d'environ $2,82$ dizaines de yard. Soit environ $28,2$ yards.

   b) Vérifier que $f'(0) = 0,822$.

$\forall\, x \in [\,0\,;\,+\infty\,[$, $f'(x) = 0,06(\text{-}2x + 13,7)$
Donc $f'(0) = 0,06(\text{-}2 \times 0 + 13,7) = 0,06 \times 13,7 = 0,822$

   c) Donner une mesure en degré de l'angle de décollage de la balle, arrondie au dixième.
   (On pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous).

L'angle de décollage a pour mesure le réel d tel que $tan(d)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}f$ en son point d'abscisse 0. Autrement dit, $tan(d) = f'(0) = 0,822$
Le tableau donné dans le sujet permet d'en déduire : $d \approx 39,4\,°$

d) Quelle propriété graphique de la courbe $\mathscr{C}f$ permet de justifier que les angles de décollage et d'atterrissage de la balle sont égaux ?

La fonction f étant une fonction polynôme du 2nd degré, sa courbe $\mathscr{C}f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 6,85$. On en déduit que les angles de décollage et d'atterrissage de la balle sont égaux.

2. <u>Seconde modélisation</u> : on rappelle qu'ici, l'unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $g(x)$ la hauteur correspondante de la balle. Selon ce modèle :

   a) Quelle est la hauteur maximale, en yard, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire ?

On a vu précédemment que le maximum de g vaut environ $2,98$.
Ainsi, selon ce 2nd modèle, la hauteur maximale atteinte par la balle sera d'environ $29,8$ yards.

On précise que $g'(0) = 0,29$ et $g'(13,7) \approx -1,87$.

b) Donner une mesure en degré de l'angle de décollage de la balle, arrondie au dixième. (On pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous).

L'angle de décollage a pour mesure le réel d tel que $tan(d)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}g$ en son point d'abscisse 0. Autrement dit, $tan(d) = g'(0) = 0,29$
Le tableau donné dans le sujet permet d'en déduire : $d \approx 16,2$ °

c) Justifier que 62 est une valeur approchée, arrondie à l'unité près, d'une mesure en degré de l'angle d'atterrissage de la balle.

L'angle d'atterrissage a pour mesure le réel a tel que $tan(a)$ correspond à l'opposé du coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}g$ en son point d'abscisse $13,7$. Autrement dit, $tan(a) = -g'(13,7) = 1,87$
En tapant la séquence de touches $\boxed{\text{Shift}}$ $\boxed{\text{tan}}$ (1,87) $\boxed{\text{EXE}}$ sur sa calculatrice, réglée en mode degré, on obtient : $a \approx 62$ °

Tableau : extrait d'une feuille de calcul donnant une mesure en degré d'un angle quand on connait sa tangente

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	tan(θ)	0,815	0,816	0,817	0,818	0,819	0,82	0,821	0,822	0,823	0,824	0,825	0,826
2	θ en degrés	39,18	39,21	39,25	39,28	39,32	39,35	39,39	39,42	39,45	39,49	39,52	39,56
3													
4	tan(θ)	0,285	0,286	0,287	0,288	0,289	0,29	0,291	0,292	0,293	0,294	0,295	0,296
5	θ en degrés	15,91	15,96	16,01	16,07	16,12	16,17	16,23	16,28	16,33	16,38	16,44	16,49

Partie C : interrogation des modèles

À partir d'un grand nombre d'observations des performances de joueurs professionnels, on a obtenu les résultats moyens suivants

Angle de décollage en degré	Hauteur maximale en yard	Angle d'atterrissage en degré	Distance horizontale en yard au point de chute
24	**32**	**52**	**137**

Quel modèle, parmi les deux étudiés précédemment, semble le plus adapté pour décrire la frappe de la balle par un joueur professionnel ? La réponse sera justifiée.

Aucun des deux modèles ne correspond exactement aux résultats moyens observés.
Le seul des quatre résultats moyens donné que l'on retrouve dans les deux modèles est celui qui correspond à la distance horizontale en yard au point de chute : 137 yards = 13,7 dizaines de yard.
La hauteur maximale atteinte par la balle est d'environ 28,2 yards avec le 1er modèle tandis qu'elle est d'environ 29,8 avec le 2nd modèle. Ce dernier résultat est plus proche des 32 yards observés en moyenne mais la différence entre les deux modèle sur ce point là est minime.
En revanche, d'après l'expérience, l'angle d'atterrissage est beaucoup plus élevé (en moyenne) que celui de décollage et cela est incompatible avec le 1er modèle dans lequel les deux angles sont égaux.
C'est pour cela que le 2nd modèle, même s'il n'est pas parfait, semble plus adapté que le 1er pour décrire la frappe de la balle par un joueur professionnel.