Nom : **DS n°3** *Note* :

Classe : 1ère Spé maths G1 — 2nd degré et trigonométrie — … / 20

le 19/12/2019

Je sais :	Evaluation des capacités (Non → Oui)
Les définitions, les propriétés et les différents autres éléments du cours	
Refaire des exercices corrigés en classe (Exercices contrôlés).	
Placer des points sur le cercle trigonométrique.	
Calculer une longueur d'arc.	
Calculer le sinus d'un réel connaissant son cosinus et sa position sur le cercle trigonométrique.	
Identifier des réels qui repèrent des points placés sur le cercle trigonométrique.	
Justifier des valeurs de cosinus et sinus.	
Démontrer une égalité.	
Résoudre des inéquations.	
Répondre à des questions liée à une situation modélisée à l'aide d'une fonction du 2nd degré.	

Cours : Compléter les définitions, les propriétés et autres éléments du cours sur les suites. **… / 3**

1. Soient A et B deux points quelconques du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O.
   Compléter le tableau de correspondance entre les mesures de $\widehat{\text{AOB}}$ et les longueurs d'arc $\overset{\frown}{\text{AB}}$ associées.

Mesures de $\widehat{\text{AOB}}$	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Longueurs ℓ de l'arc $\overset{\frown}{\text{AB}}$							

2. Soit M le point de $\mathscr{C}$ tel que $\overset{\frown}{\text{IM}} = x$. Soit x' un autre réel qui permet de repérer le point M sur $\mathscr{C}$.
   Quelle relation permet d'exprimer x' en fonction de x ?
   ……………………………………………………………………………………………………
3. Comment appelle-t-on le sens inverse des aiguilles d'une montre ?
   ……………………………………………………………………………………………………
4. Qu'appelle-t-on la mesure principale d'un angle en radians ?
   ……………………………………………………………………………………………………

Exercices contrôlés : **… / 5**

1. Convertir en degrés les mesures d'angles suivantes, données en radians.
   a) $\frac{2\pi}{5}$ b) $\frac{7\pi}{3}$
2. Déterminer la mesure principale des angles suivants.
   a) $\alpha = -\frac{7\pi}{6}$ b) $\beta = \frac{45\pi}{4}$
3. Indiquer, en justifiant la réponse, si les deux réels de chaque couple ont le même point-image sur le cercle trigonométrique.
   a) $\frac{18\pi}{5}$ et $\frac{3\pi}{5}$ b) $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{-19\pi}{6}$
4. Quelle est la valeur du cosinus d'un angle en radian situé dans $[\frac{\pi}{2} ; \pi]$ dont le sinus vaut 0,2 ?
5. Donner la valeur exacte des nombres suivants :
   a) $cos\,(\frac{55\pi}{3})$ b) $sin\,(\frac{-95\pi}{4})$

Exercice 2 : **… / 2**

1. Tracer le cercle trigonométrique puis placer le point M image de $\frac{17\pi}{6}$ et le point N image de $\frac{13\pi}{4}$.
2. Calculer la longueur du petit arc de cercle d'extrémités M et N.

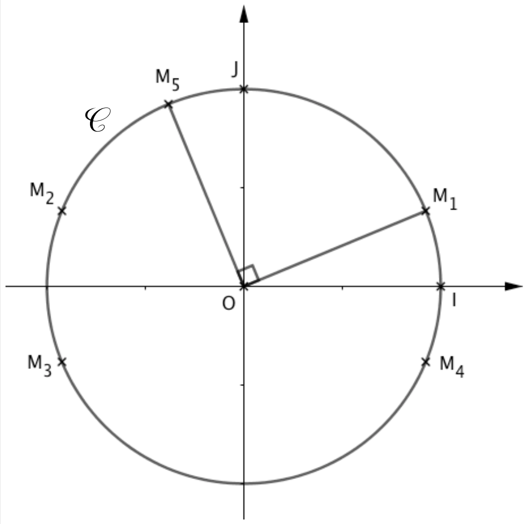
Exercice 3 : **… / 4**

La valeur exacte de $cos\,(\frac{\pi}{8})$ est $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

1. Calculer la valeur exacte de $sin\,(\frac{\pi}{8})$.
2. Sur le cercle trigonométrique ci-contre, M_1 est le point-image de $\frac{\pi}{8}$. Les points M_2, M_3, M_4 et M_5 sont tels que :
   - M_2 est le symétrique de M_1 par rapport à l'axe (OJ).
   - M_3 est le symétrique de M_1 par rapport à O.
   - M_4 est le symétrique de M_1 par rapport à l'axe (OI).
   - $\widehat{M_1 O M_5} = 90°$

   En déduire les calculs des réels associés à M_2, M_3, M_4 et M_5.
3. On admet les propriétés suivantes : $\forall\ \theta \in \mathbb{R}$, on a :
   - $cos\,(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\,sin\,(\theta)$
   - $sin\,(\frac{\pi}{2}+\theta) = cos\,(\theta)$

   En déduire les valeurs exactes de $cos\,(\frac{5\pi}{8})$ et $sin\,(\frac{5\pi}{8})$.



Exercice 4 : Démontrer que l'égalité suivante est vraie, pour tout réel x : **… / 1,5**

$$(cos\,x + 2\,sin\,x)^2 + (2\,cos\,x - sin\,x)^2 = 5$$

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes. **… / 2**

a) $(-2x+7)(x+11) \geq 0$ b) $3x^2 + 2 > 5x$

Exercice 6 : Lancer de javelot. **… / 2,5**

Une athlète lance un javelot à l'instant $t = 0$.
La hauteur $h(t)$, en mètre, à l'instant t, en seconde, de la pointe du javelot est définie par :

$$h(t) = \frac{-1}{2}\,t^2 + 8t + 2$$

La hauteur est mesurée à partir du sol.

1. Calculer la hauteur de la pointe au moment du lancer.
2. A quel instant le javelot est-il le plus haut ?
3. Le javelot atteindra-t-il une hauteur de 35 m ?
4. A quel instant le javelot retombera-t-il au sol, à 10^{-2} près ?

Correction du DS n°3

Cours : Compléter les définitions, les propriétés et autres éléments du cours sur les suites.

1. Soient A et B deux points quelconques du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O.
   Compléter le tableau de correspondance entre les mesures de $\widehat{AOB}$ et les longueurs d'arc $\overset{\frown}{AB}$ associées.

Mesures de $\widehat{AOB}$	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Longueurs ℓ de l'arc $\overset{\frown}{AB}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

2. Soit M le point de $\mathscr{C}$ tel que $\overset{\frown}{IM} = x$. Soit x' un autre réel qui permet de repérer le point M sur $\mathscr{C}$.
   Quelle relation permet d'exprimer x' en fonction de x ?

$x' = x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

3. Comment appelle-t-on le sens inverse des aiguilles d'une montre ?

On dit que le sens inverse des aiguilles d'une montre est le sens direct.

4. Qu'appelle-t-on la mesure principale d'un angle en radians ?

La mesure principale d'un angle en radians est sa mesure comprise dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

Exercices contrôlés : Voir la correction des exercices

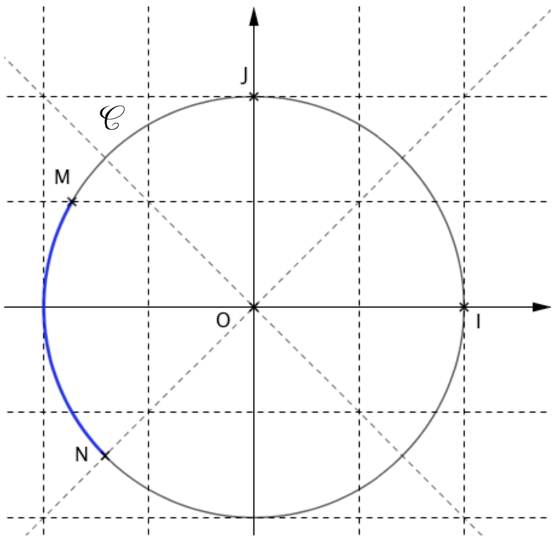
- n°4 et 6 du cours.
- p 100 et 101 n°12, 19 et 21 du livre.

Exercice 2 :

1. Tracer le cercle trigonométrique puis placer le point M image de $\frac{17\pi}{6}$ et le point N image de $\frac{13\pi}{4}$.

On a : $\frac{17\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi$ Et : $\frac{13\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = \frac{-3\pi}{4} + 4\pi$

On en déduit que M et N sont repérés sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ par les réels $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{-3\pi}{4}$.



2. Calculer la longueur du petit arc de cercle d'extrémités M et N.

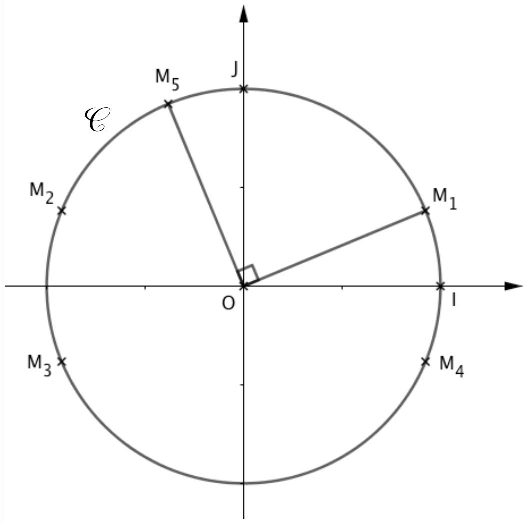
$\frac{13\pi}{4} - \frac{17\pi}{6} = \frac{6 \times 13\pi}{24} - \frac{4 \times 17\pi}{24} = \frac{78\pi - 68\pi}{24} = \frac{10\pi}{24} = \frac{5\pi}{12}$

Ainsi, le petit arc $\overset{\frown}{MN}$ a pour longueur $\frac{5\pi}{12}$.

Exercice 3 :

La valeur exacte de $cos\,(\frac{\pi}{8})$ est $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

1. Calculer la valeur exacte de $sin\,(\frac{\pi}{8})$.



$\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, on a : $(cos\,\alpha)^2 + (sin\,\alpha)^2 = 1$

On en déduit que, si $\alpha = \frac{\pi}{8}$, alors : $(cos\,\frac{\pi}{8})^2 + (sin\,\frac{\pi}{8})^2 = 1$

Ainsi : $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2 + (sin\,\frac{\pi}{8})^2 = 1$

$\frac{2+\sqrt{2}}{4} + (sin\,\frac{\pi}{8})^2 = 1$

$(sin\,\frac{\pi}{8})^2 = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{4}{4} - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{4-2-\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

On en déduit : $sin\,(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ ou $sin\,(\frac{\pi}{8}) = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

Or : $\frac{\pi}{8} \in [\,0\,;\,\pi\,]$ donc $sin\,(\frac{\pi}{8}) \geq 0$.

On en conclut : $sin\,(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

2. Sur le cercle trigonométrique ci-contre, M_1 est le point-image de $\frac{\pi}{8}$. Les points M_2, M_3, M_4 et M_5 sont tels que :
   - M_2 est le symétrique de M_1 par rapport à l'axe (OJ).
   - M_3 est le symétrique de M_1 par rapport à O.
   - M_4 est le symétrique de M_1 par rapport à l'axe (OI).
   - $\widehat{M_1 O M_5} = 90°$

   En déduire les calculs des réels associés à M_2, M_3, M_4 et M_5.

Si M_1 est le point-image de $\frac{\pi}{8}$ alors M_4 est le point-image de $\frac{-\pi}{8}$.

$\pi - \frac{\pi}{8} = \frac{8\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$ Alors M_2 est le point-image de $\frac{7\pi}{8}$.

$\pi + \frac{\pi}{8} = \frac{8\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{9\pi}{8}$ Alors M_3 est le point-image de $\frac{9\pi}{8}$.

$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{4\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$ Alors M_5 est le point-image de $\frac{5\pi}{8}$.

3. On admet les propriétés suivantes : $\forall\ \theta \in \mathbb{R}$, on a :
   - $cos\,(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\,sin\,(\theta)$
   - $sin\,(\frac{\pi}{2} + \theta) = cos\,(\theta)$

   En déduire les valeurs exactes de $cos\,(\frac{5\pi}{8})$ et $sin\,(\frac{5\pi}{8})$.

On sait que : $cos\,(\frac{5\pi}{8}) = cos\,(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8})$

Or : $\forall\ \theta \in \mathbb{R}$, $cos\,(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\,sin\,(\theta)$

On en déduit : $cos\,(\frac{5\pi}{8}) = -\,sin\,(\frac{\pi}{8}) = -\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

De même : $sin\,(\frac{5\pi}{8}) = sin\,(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8})$

Or : $\forall\ \theta \in \mathbb{R}$, $sin\,(\frac{\pi}{2} + \theta) = cos\,(\theta)$

Donc : $sin\,(\frac{5\pi}{8}) = cos\,(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Exercice 4 : Démontrer que l'égalité suivante est vraie, pour tout réel x :

$$(\cos x + 2\sin x)^2 + (2\cos x - \sin x)^2 = 5$$

On applique les identités remarquables $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
A = $(\cos x + 2\sin x)^2 + (2\cos x - \sin x)^2$
A = $(\cos x)^2 + 2 \times \cos x \times 2\sin x + (2\sin x)^2 + (2\cos x)^2 - 2 \times 2\cos x \times \sin x + (\sin x)^2$
A = $(\cos x)^2 + 4\cos x \sin x + 4(\sin x)^2 + 4(\cos x)^2 - 4\cos x \sin x + (\sin x)^2$
A = $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 + 4[(\cos x)^2 + (\sin x)^2]$
Or : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, on a : $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$
Donc : A = $1 + 4 \times 1 = 5$
Ainsi : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $(\cos x + 2\sin x)^2 + (2\cos x - \sin x)^2 = 5$

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $(-2x + 7)(x + 11) \geq 0$

$-2x + 7 \geq 0 \iff -2x \geq -7 \iff x \leq \frac{7}{2}$

$x + 11 \geq 0 \iff x \geq -11$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-11		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$-2x + 7$		+		+	0	−	
$x + 11$		−	0	+		+	
$(-2x + 7)(x + 11)$		−	0	+	0	−	

Finalement : $(-2x + 7)(x + 11) \geq 0 \iff x \in \left[-11 ; \frac{7}{2}\right]$

b) $3x^2 + 2 > 5x \iff 3x^2 - 5x + 2 > 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 25 - 24 = 1 > 0$
Le trinôme du 2nd degré admet deux racines distinctes.

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - \sqrt{1}}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 1}{6} = 1$

De plus, le trinôme est du signe de $a = 3$, sauf entre ses racines. On en déduit :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2 - 5x + 2$		+	0	−	0	+	

Ainsi : $3x^2 + 2 > 5x \iff x \in \left]-\infty ; \frac{2}{3}\right[\cup]1 ; +\infty[$

Exercice 6 : Une athlète lance un javelot à l'instant $t = 0$.
La hauteur $h(t)$, en mètre, à l'instant t, en seconde, de la pointe du javelot est définie par :

$$h(t) = \frac{-1}{2}t^2 + 8t + 2$$

La hauteur est mesurée à partir du sol.

1. Calculer la hauteur de la pointe au moment du lancer.

$h(0) = \frac{-1}{2} \times 0^2 + 8 \times 0 + 2 = 2$
La pointe du javelot était à une hauteur de 2 m au moment du lancer.

2. A quel instant le javelot est-il le plus haut ?

La trajectoire du javelot est celle d'un arc de parabole. On calcule l'abscisse de son sommet :
$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2 \times \frac{-1}{2}} = \frac{-8}{-1} = 8.$ Ainsi, le javelot est le plus haut au bout de 8 s.

3. Le javelot atteindra-t-il une hauteur de 35 m ?

On calcule le maximum atteint par la fonction h, soit l'ordonnée du sommet de la parabole.
$\beta = h(8) = \frac{-1}{2} \times 8^2 + 8 \times 8 + 2 = \frac{-64}{2} + 64 + 2 = -32 + 66 = 34 < 35$
Ainsi, le javelot n'atteindra pas une hauteur de 35 m.

4. A quel instant le javelot retombera-t-il au sol, à 10^{-2} près ?

$h(t) = \frac{-1}{2} t^2 + 8t + 2$

On calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times \frac{-1}{2} \times 2 = 64 + 4 = 68 > 0$

Le trinôme du 2^{nd} degré admet deux racines distinctes.

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{68}}{-1} = 8 + 2\sqrt{17} \approx 16,25$ s

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{68}}{-1} = 8 - 2\sqrt{17} \approx -0,25 < 0$. Cette valeur ne peut pas correspondre à une durée.

Ainsi, le javelot retombera au sol au bout d'environ $16,25$ s.