*Nom* :
Prénom :

**DS n°3**
le 20/11/2017

*Classe* :
T S 1

| | Avis du professeur | | |
|---|---|---|---|
| ***Compétences évaluées*** | ***Acquis*** | ***En cours d'acquisition*** | ***Non Acquis*** |
| Démontrer par récurrence. | | | |
| Etudier les variations d'une fonction. | | | |
| Placer des points dans un repère de l'espace. | | | |
| Déterminer des coordonnées de points. | | | |
| Justifier que des droites sont coplanaires ou non / parallèles ou sécantes. | | | |
| Justifier qu'un point donné appartient à l'intersection de deux droites. | | | |
| Déterminer l'intersection de deux droites. | | | |
| Connaître suffisamment bien les notions de géométrie pour justifier des Vrai / Faux. | | | |
| Déterminer la représentation paramétrique d'un plan. | | | |
| Déterminer le point d'intersection d'une droite et d'un plan. | | | |
| Prise d'initiative : Montrer que des points sont coplanaires. | | | |
| Maîtrise des calculs. | | | |

| Barème | Ex 1 (EC) : 5 pts | Ex 2 (EC) : 5 pts | Ex 3 : 5 pts | Ex 4 : 5 pts | Total : 20 pts |
|---|---|---|---|---|---|
| Note de l'élève | | | | | |

Les exercices seront traités dans l'ordre de votre choix. La présentation et le soin apportés à la présentation de votre copie rentreront pour une part importante dans sa notation.

*Exercice 1* : (Exercice contrôlé)

1. On rappelle la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante :

   Soit $u$ une fonction dérivable sur I et $n$ est un entier naturel non nul.
   La fonction $f$ définie sur I par $f(x) = (u(x))^n$ est dérivable sur I et :
   $\mathscr{P}_n$ : « Si $f(x) = (u(x))^n$ alors $f'(x) = n\,u'(x)\,(u(x))^{n-1}$ »

   Démontrer la propriété $\mathscr{P}_n$ par récurrence dans le cas où $n$ est un entier naturel non nul.

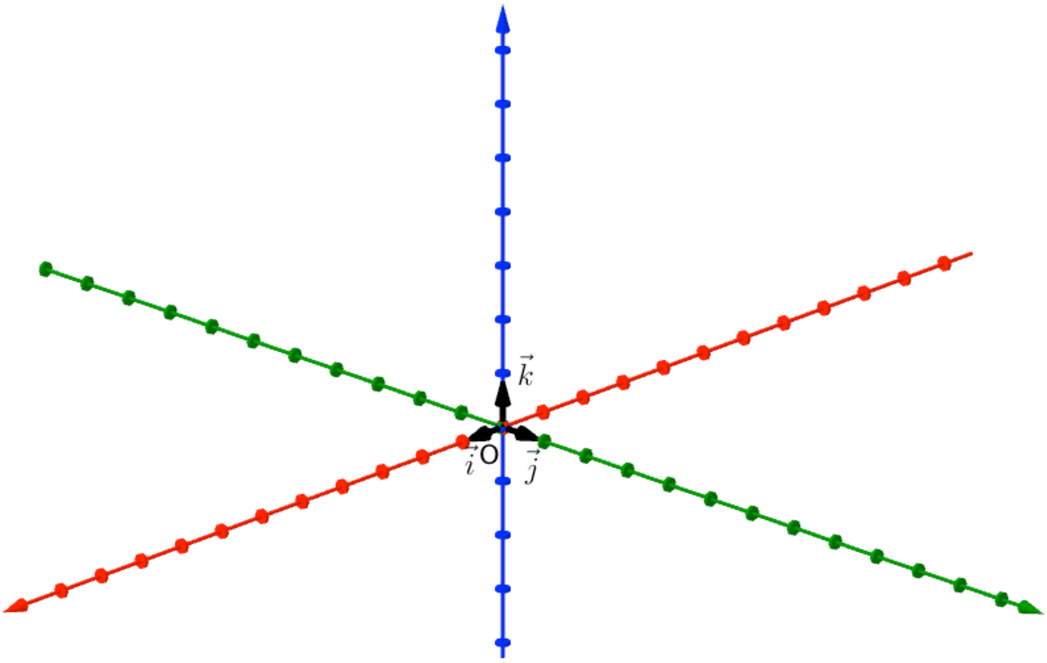
2. Déterminer les ensembles de définition puis les variations des fonctions $f$, $g$, $h$ et $i$ définies ci-dessous :
   a) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + \frac{x}{2} - 1$
   b) $g(x) = x^2\sqrt{x}$
   c) $h(x) = \sqrt{2x^2 - 2x - 12}$
   d) $i(x) = \frac{1}{(2-8x)^3}$

*Exercice 2* : (Exercice contrôlé)

Les parties A et B sont indépendantes. Sans aucun rapport l'une avec l'autre.

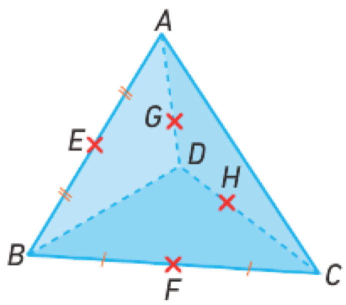
Partie A :

Placer les points $A(4\ ;\ -1\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 2\ ;\ -4)$, $C(2\ ;\ 1\ ;\ 3)$ et $D(-1\ ;\ 5\ ;\ -3)$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.




Partie B : ABCD est un tétraèdre.

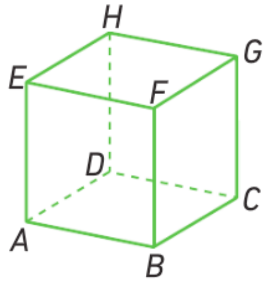
E est le milieu de [AB], F est le milieu de [BC], G et H sont tels que $\overrightarrow{DG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.




1. On se place dans le repère $(D\ ;\ \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$.
   Déterminer les coordonnées de E, F, G et H dans ce repère.
2. a) Tracer les droites (EF) et (GH).
   Quelle conjecture peut-on émettre sur leurs position relative ? Démontrer cette conjecture.
   b) En déduire que (EH) et (GF) sont coplanaires.
   c) Montrer que (EH) et (GF) sont sécantes en M de coordonnées $(\frac{1}{5}\ ;\ \frac{1}{5}\ ;\ \frac{1}{5})$.
3. Soit I le milieu de [AC]. En étudiant les représentations paramétriques des droites (IM) et (BD), montrer que ces deux droites sont sécantes en un point J dont on déterminera les coordonnées.

*Exercice 3* : Vrai ou Faux ? Justifier.

Partie A : On se place dans le cube ABCDEFGH :




- Affirmation 1 : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont coplanaires.

On note M, N et P les milieux respectifs des arêtes [CD], [EF] et [BF].

- Affirmation 2 : Les plans (BCP) et (GHM) se coupent selon la droite (CG).
- Affirmation 3 : Les droites (NP) et (DG) sont orthogonales.

Partie B : On considère la droite (d) définie par $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 2 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ .

- Affirmation 4 : la droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{u}\,(4\,;-6\,;-2)$ et passe par $T(1\,;-3\,;-1)$.
- Affirmation 5 : la droite (d) coupe l'axe des cotes au point $S(3\,;-6\,;0)$.

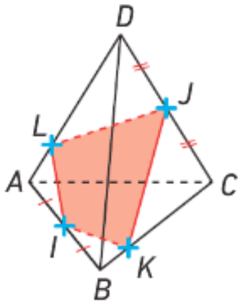
*Exercice 4* :

Partie A :

1. On donne $M(-1\,;3\,;2)$, $\vec{u}\,(-1\,;3\,;-3)$ et $\vec{v}\,(1\,;1\,;1)$.
   Déterminer une représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}$ passant par M et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Soit la droite $\Delta$ définie par $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = -3t + 3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$. Quelle est la position relative de $\mathscr{P}$ et de $\Delta$ ?

Partie B : Prise d'initiative.

On considère un tétraèdre ABCD.




Soient I et J les milieux des arêtes [AB] et [CD] et les points K et L tels que :

$$\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$$

Montrer que les points I, J, K et L sont coplanaires.

# Correction DS n°3

*Exercice 1* : (Exercice contrôlé)
Cf. correction des exercices n°1 à 4 dans le cahier de cours.

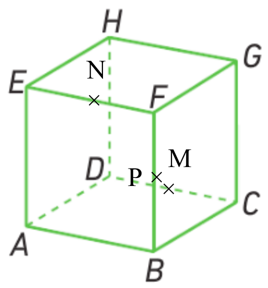
*Exercice 2* : (Exercice contrôlé)

Partie A : Cf. correction du n° 29 p 324 dans le cahier d'exercices.

Partie B : Cf. correction du n° 46 p 326 dans le cahier d'exercices.

*Exercice 3* : Vrai ou Faux ? Justifier.

Partie A : On se place dans le cube ABCDEFGH :




- Affirmation 1 : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont coplanaires.

ABCDEFGH étant un cube, on a : $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF}$.
Les points A, B, F et E sont coplanaires dans le plan (ABF) donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont coplanaires.
On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont coplanaires. L'affirmation 1 est vraie.

Autre raisonnement :
On a : $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$
Et d'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$
On en déduit que $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ et que les vecteurs $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont coplanaires.

On note M, N et P les milieux respectifs des arêtes [CD], [EF] et [BF].

- Affirmation 2 : Les plans (BCP) et (GHM) se coupent selon la droite (CG).

P est le milieu de [BF] donc les droites (BP) et (BF) sont confondues. De plus, (BF) et (CG) sont parallèles.
On en déduit que le plan (BCP) est confondu avec le plan (BCGF).
M est le milieu de [CD] et (GH) est la parallèle à (CD) passant par M.
On en déduit que le plan (GHM) est confondu avec le plan (GHDC).
Puisque les plans (BCGF) et (GHDC) sont sécants selon la droite (CG) alors l'affirmation 2 est vraie.

- Affirmation 3 : Les droites (NP) et (DG) sont orthogonales.

P est le milieu de [BF] et N est celui de [EF].
On en déduit, d'après le théorème des milieux que les droites (NP) et (EB) sont parallèles.
Dans le cube ABCDEFGH, les droites (EB) et (HC) sont parallèles.
On en déduit que les droites (NP) et (HC) sont elles aussi parallèles.
Puisque la face CDHG est un carré, ses diagonales (HC) et (DG) sont perpendiculaires.
Dans l'espace, si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est orthogonale à l'autre.
On en déduit que les droites (NP) et (DG) sont orthogonales. L'affirmation 3 est donc vraie.

Partie B : On considère la droite (d) définie par $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 2 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

- Affirmation 4 : la droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{u}\,(4\,;-6\,;-2)$ et passe par $T(1\,;-3\,;-1)$.

La droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{v}\,(2\,;-3\,;-1)$ colinéaire au vecteur $\vec{u}\,(4\,;-6\,;-2)$.
Donc (d) est également dirigée par $\vec{u}$. Pour vérifier si $T(1\,;-3\,;-1)$ appartient à (d) on résout :

$$\begin{cases} 1 = -1 + 2t \\ -3 = -3t \\ -1 = 2 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 2 \\ 3t = 3 \\ t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$$

Le système n'admet pas de solution donc T n'appartient pas à (d). L'affirmation 4 est donc fausse.

- Affirmation 5 : la droite (d) coupe l'axe des cotes au point $S(3\,;-6\,;0)$.

Si le point S appartenait à l'axe des côtes alors les vecteurs $\overrightarrow{OS}(3\,;-6\,;0)$ et $\vec{k}\,(0\,;0\,;1)$ seraient colinéaires.
Ce n'est pas le cas, donc l'affirmation 5 est fausse.

*Exercice 4* :

Partie A :

1. On donne $M(-1\,;3\,;2)$, $\vec{u}\,(-1\,;3\,;-3)$ et $\vec{v}\,(1\,;1\,;1)$.
Déterminer une représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}$ passant par M et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\mathscr{P} : \begin{cases} x = -1 - t' + t'' \\ y = 3 + 3t' + t'' \\ z = 2 - 3t' + t'' \end{cases} \quad \text{avec } t' \in \mathbb{R} \text{ et } t'' \in \mathbb{R}.$$

*Remarque* : On évite d'utiliser le paramètre $t$, déjà utilisé dans la question suivante.

2. Soit la droite $\Delta$ définie par $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = -3t + 3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$. Quelle est la position relative de $\mathscr{P}$ et de $\Delta$ ?

*Attention* : On ne prouve pas que $\mathscr{P}$ et $\Delta$ ne sont pas parallèles en comparant le vecteur directeur $\vec{w}\,(1\,;-3\,;-3)$ de $\Delta$ à un seul des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui dirigent $\mathscr{P}$.

*Propriété* : $\mathscr{P}$ et $\Delta$ sont parallèles si et seulement si les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

*Méthode* : Pour déterminer si $\mathscr{P}$ et $\Delta$ sont parallèles on peut aussi résoudre le système suivant pour déterminer leur point d'intersection éventuel. On utilise la méthode des combinaisons linéaires.

$$\begin{cases} t + 1 = -1 - t' + t'' \\ -3t + 2 = 3 + 3t' + t'' \\ -3t + 3 = 2 - 3t' + t'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t + 3t' - 3t'' = -6 & 3L_1 \\ -3t - 3t' - t'' = 1 & L_2 \\ -3t + 3t' - t'' = -1 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t + 3t' - 3t'' = -6 & L_1' = 3L_1 \\ -4t'' = -5 & L_2' = 3L_1 + L_2 \\ 6t' = -2 & L_3' = L_3 - L_2 \end{cases}$$

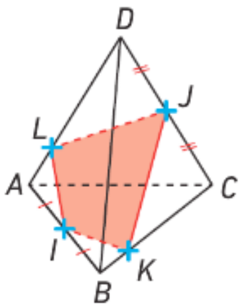
$$\begin{cases} t + t' - t'' = -2 & L_1 \\ 4t'' = 5 \\ t' = \frac{-2}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = t'' - t' - 2 \\ t'' = \frac{5}{4} \\ t' = \frac{-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{4} + \frac{1}{3} - 2 \\ t'' = \frac{5}{4} \\ t' = \frac{-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-5}{12} \\ t'' = \frac{5}{4} \\ t' = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

Le système a une solution unique. On en déduit que le plan $\mathscr{P}$ et la droite $\Delta$ sont sécantes en un point M dont on obtient les coordonnées en remplaçant $t$ par $\frac{-5}{12}$ dans la représentation paramétrique de (d) :

$$\begin{cases} x = \frac{-5}{12} + 1 \\ y = -3 \times \frac{-5}{12} + 2 \\ z = -3 \times \frac{-5}{12} + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{12} \\ y = \frac{13}{4} \\ z = \frac{17}{4} \end{cases}$$

<u>Partie B</u> : Prise d'initiative.

On considère un tétraèdre ABCD.




Soient I et J les milieux des arêtes [AB] et [CD] et les points K et L tels que :

$$\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$$

Montrer que les points I, J, K et L sont coplanaires.

---

On se place dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

On a : $A(0 ; 0 ; 0)$ $B(1 ; 0 ; 0)$ $C(0 ; 1 ; 0)$ $D(0 ; 0 ; 1)$

I et J étant les milieux de [AB] et [CD], on en déduit : $I(\frac{1}{2} ; 0 ; 1)$ et $J(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2})$.

D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. On en déduit $K(\frac{3}{4} ; \frac{1}{4} ; 0)$.

Enfin, puisque $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ alors : $L(0 ; 0 ; \frac{1}{4})$.

On en déduit les coordonnées des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{LI}\,(\frac{1}{2} ; 0 ; \frac{-1}{4})$ $\overrightarrow{IK}\,(\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; 0)$ $\overrightarrow{LJ}\,(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{4})$

On résout : $\overrightarrow{LI} = \alpha\,\overrightarrow{IK} + \beta\,\overrightarrow{LJ}$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\alpha + 0\beta \\ 0 = \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{2}\beta \\ \frac{-1}{4} = 0\alpha + \frac{1}{4}\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}\alpha = \frac{1}{2} \\ \alpha = -2\beta \\ \frac{1}{4}\beta = \frac{-1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = -2\beta \\ \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

On en déduit que $\overrightarrow{LI} = 2\,\overrightarrow{IK} - \overrightarrow{LJ}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{LI}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{LJ}$ sont coplanaires donc les points I, J, K et L sont coplanaires.