Nom : **DS n°3** *Note* :

Prénom : TS … le 19/11/2018 … / 20

	Avis du professeur		
Compétences évaluées	***Acquis***	***En cours d'acquisition***	***Non Acquis***
Déterminer / Justifier l'ensemble de définition d'une fonction.			
Dériver.			
Etudier le signe d'une fonction.			
Déterminer l'équation d'une tangente.			
Vérifier qu'un point appartient à une droite / à un plan.			
Démontrer qu'une relation vectorielle existe entre trois vecteurs.			
Justifier la position relative d'une droite et d'un plan.			
Justifier les coordonnées du point d'intersection de deux droites.			
Justifier qu'un plan existe.			
Déterminer une représentation paramétrique de plan / de droite.			
Démontrer qu'un plan coupe une droite.			
Déterminer les coordonnées du point d'intersection d'un plan et d'une droite.			
Justifier la nature d'un quadrilatère.			

Les exercices seront traités dans l'ordre de votre choix. La présentation et le soin apportés à la présentation de votre copie rentreront en compte dans sa notation.

Exercice 1 : **… / 10**

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{5-2x}{3x-4}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

   a) Déterminer l'ensemble de définition puis étudier les variations de f.

   b) Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 2.

2. g est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = 2\sqrt{x}\,(x^2 - 2x + 1)$.
   Etudier les variations de g.

3. On considère la fonction h définie par $h(x) = (2x^2 - 1)^3$.

   Après avoir justifié pourquoi h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, étudier les variations de h.

4. a) Justifier que la fonction $i : x \mapsto \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$ est définie sur $[-1 ; 4]$ et dérivable sur $]-1 ; 4[$.

   b) Etudier les variations de i sur $[-1 ; 4]$. Justifier et préciser l'existence d'un extremum local.

Exercice 2 : **… / 3**

L'espace est rapporté à un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points :

$$A(0 ; 1 ; 0) \quad B(0 ; 0 ; -1) \quad C(1 ; 0 ; 2)$$

$\mathscr{P}$ désigne le plan (ABC) et $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

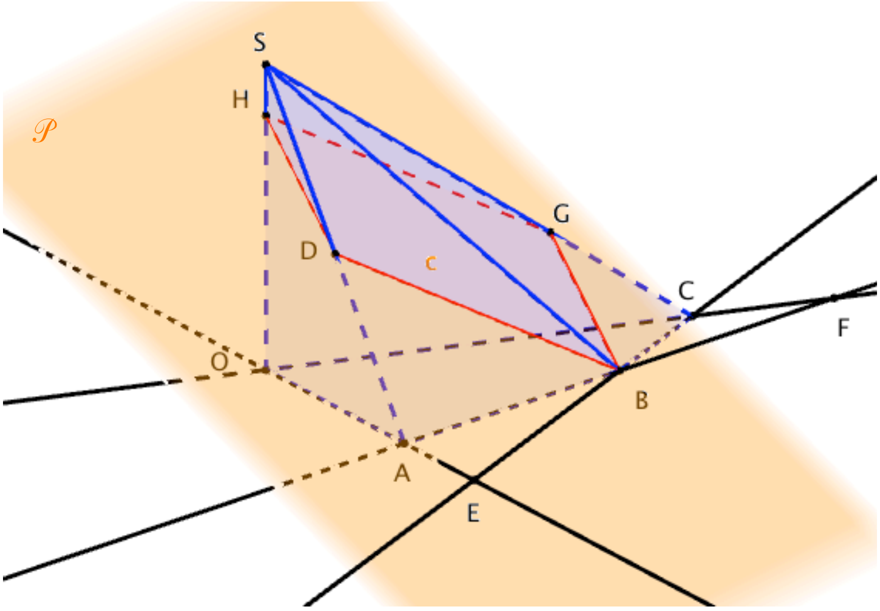
1. Vérifier que C est un point de $\mathscr{D}$.
2. On admet que $D(2 ; -2 ; 3)$ appartient à $\mathscr{D}$.
   Démontrer qu'il existe deux réels uniques α et β tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire les positions relatives de la droite $\mathscr{D}$ et du plan $\mathscr{P}$.

Exercice 3 : (Exercice contrôlé) **... / 7**

On se place dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k})$ et on considère la pyramide SOABC avec :

$$A(4\,;0\,;0)\quad B(2\,;4\,;0)\quad C(0\,;6\,;0)\quad S(0\,;0\,;4)$$

On note E le point d'intersection de (BC) et (OA) et F celui de (AB) et (OC). D est le milieu de [SA].
$\mathscr{P}$ est le plan parallèle au plan (SEF) et passant par le point D.



On s'intéresse à la nature de la section de la pyramide SOABC par le plan $\mathscr{P}$.

1. On admet que E a pour coordonnées $E(6\,;0\,;0)$. Montrer que F a pour coordonnées $F(0\,;8\,;0)$.
2. Calculer les coordonnées de D.
3. a) Justifier que le plan (SEF) existe.

   b) Déterminer une représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}$.

   c) Vérifier que le point B appartient à la section étudiée.

   d) Quel autre point appartient de manière évidente à la section ?
4. On admet les représentations paramétriques de $\mathscr{P}$ et (SC) suivantes :

   $$\mathscr{P} : \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = 8t' \\ z = 2 - 4t - 4t' \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R} \qquad (SC) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 6t'' \\ z = 4 - 4t'' \end{cases} \text{ avec } t'' \in \mathbb{R}$$

   Démontrer que $\mathscr{P}$ et (SC) sont sécantes en un point G dont on déterminera les coordonnées.
   On admettra par la suite que G appartient à l'arête [SC].
5. On admet que $\mathscr{P}$ coupe l'arête [SO] en $H(0\,;0\,;\frac{10}{3})$ et que $G(0\,;4\,;\frac{4}{3})$.
   Justifier la nature de la section de la pyramide SOABC par le plan $\mathscr{P}$.

Correction DS n°3

Exercice 3 : Cf. correction de l'exercice n°55 p 327

Exercice 1 :

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{5-2x}{3x-4}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

   a) Déterminer l'ensemble de définition puis étudier les variations de f.

$3x - 4 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x \neq 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \frac{4}{3}$

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{4}{3}\}$.

$\forall\ x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{4}{3}\}$, $f(x) = \frac{5-2x}{3x-4} = \frac{u(x)}{v(x)}$

Donc : $f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{(v(x))^2} = \frac{-2\,(3x-4)-3(5-2x)}{(3x-4)^2} = \frac{-6x+8-15+6x}{(3x-4)^2} = \frac{-7}{(3x-4)^2}$

$-7 < 0$ et $\forall\ x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{4}{3}\}$, on a : $(3x-4)^2 > 0$ donc : $f'(x) < 0$

On en déduit que f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ \frac{4}{3}[$ puis sur $]\frac{4}{3}\ ;\ +\infty[$.

   b) Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 2.

$\forall\ x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{4}{3}\}$, on a : $f(x) = \frac{5-2x}{3x-4}$ et : $f'(x) = \frac{-7}{(3x-4)^2}$

Donc : $f(2) = \frac{5-4}{6-4} = \frac{1}{2}$ et : $f'(2) = \frac{-7}{(6-4)^2} = \frac{-7}{4}$

On en déduit que la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 2 a pour équation $y = f'(2)\,(x-2) + f(2)$

$$y = \frac{-7}{4}(x-2) + \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{-7}{4}x + \frac{7}{2} + \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{-7}{4}x + 4$$

2. g est la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $g(x) = 2\sqrt{x}\,(x^2-2x+1)$.
   Etudier les variations de g.

La fonction g est définie sur $[0\ ;+\infty[$ et dérivable sur $]0\ ;+\infty[$.

$\forall\ x \in [0\ ;+\infty[$, $g(x) = 2\sqrt{x}\,(x^2-2x+1) = u(x)\,v(x)$

$\forall\ x \in]0\ ;+\infty[$, $g'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$

Donc : $g'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}}\,(x^2-2x+1) + 2\sqrt{x}\,(2x-2) = \frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x}} + \frac{2\,(\sqrt{x})^2\,(2x-2)}{\sqrt{x}}$

$g'(x) = \frac{x^2-2x+1+2x(2x-2)}{\sqrt{x}} = \frac{x^2-2x+1+4x^2-4x}{\sqrt{x}} = \frac{5x^2-6x+1}{\sqrt{x}}$

On considère le trinôme du 2nd degré $5x^2-6x+1$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4\times 5 = 36 - 20 = 16 > 0$

Le trinôme admet deux racines distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-4}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ et : $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+4}{10} = 1$

Le trinôme est du signe de a (positif) à l'extérieur des racines.

De plus : $\forall\ x \in]0\ ;+\infty[$, $\sqrt{x} > 0$

$g(0) = 2\sqrt{0}\,(0^2-0+1) = 0 \qquad g(1) = 2\sqrt{1}\,(1-2+1) = 2\times 0 = 0 \qquad g(\frac{1}{5}) = \ldots = \frac{32\sqrt{5}}{125}$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{5}$		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
g	0	$\nearrow$	$\frac{32\sqrt{5}}{125}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

3. On considère la fonction h définie par $h(x) = (2x^2 - 1)^3$.

   Après avoir justifié pourquoi h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, étudier les variations de h.

$h(x) = (2x^2 - 1)^3 = u(x)^3$

La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée d'une fonction polynôme du 2nd degré (définie et dérivable sur $\mathbb{R}$) suivie de la fonction cube (d'exposant positif).

$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 3\,u'(x)\,u(x)^2 = 3 \times 4x\,(2x^2 - 1)^2 = 12x\,(2x^2 - 1)^2$

$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $(2x^2 - 1)^2 \geq 0$ De plus : $12x \geq 0 \iff x \geq 0$

On en déduit : $\forall\ x \in]-\infty\ ;\ 0[$, $h'(x) < 0$ et : $\forall\ x \in [0\ ;\ +\infty[$, $h'(x) \geq 0$.
Ainsi, la fonction h est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$ puis croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

4. a) Justifier que la fonction $i : x \mapsto \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$ est définie sur $[-1\ ;\ 4]$ et dérivable sur $]-1\ ;\ 4[$.

On considère le trinôme du 2nd degré $-x^2 + 3x + 4$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 4 \times 4 = 25 > 0$

Le trinôme admet deux racines distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-5}{-2} = 4$ et : $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+5}{-2} = -1$
Le trinôme est du signe de a (négatif) à l'extérieur des racines.
On en déduit : $\forall\ x \in [-1\ ;\ 4]$, $-x^2 + 3x + 4 \geq 0$.
Ainsi, la fonction $i : x \mapsto \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$ est définie sur $[-1\ ;\ 4]$.
De plus : $\forall\ x \in]-1\ ;\ 4[$, $-x^2 + 3x + 4 \neq 0$ donc i est dérivable sur $]-1\ ;\ 4[$.

   b) Etudier les variations de i sur $[-1\ ;\ 4]$. Justifier et préciser l'existence d'un extremum local.

$\forall\ x \in [-1\ ;\ 4]$, $i(x) = \sqrt{-x^2 + 3x + 4} = \sqrt{u(x)}$

$\forall\ x \in]-1\ ;\ 4[$, $i'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x+4}}$

$\forall\ x \in]-1\ ;\ 4[$, $2\sqrt{-x^2 + 3x + 4} > 0$ donc $i'(x)$ est du signe de $-2x + 3$ sur $]-1\ ;\ 4[$.

$-2x + 3 \geq 0 \iff 3 \geq 2x \iff x \leq \frac{3}{2}$

$i(-1) = i(4) = 0$ $i(\frac{3}{2}) = \ldots = \frac{5}{2}$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	-1		$\frac{3}{2}$		4
$i'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
i	0	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	0

i' s'annule et change de signe en $x = \frac{3}{2}$. D'où l'existence d'un extremum local.

A la lecture du tableau de variations, la fonction i atteint son maximum $\frac{5}{2}$ en $x = \frac{3}{2}$.

Exercice 2 : L'espace est rapporté à un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points :

$$A(0 ; 1 ; 0) \quad B(0 ; 0 ; -1) \quad C(1 ; 0 ; 2)$$

$\mathscr{P}$ désigne le plan (ABC) et $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

1. Vérifier que C est un point de $\mathscr{D}$.

C(1 ; 0 ; 2) est un point de $\mathscr{D}$ si et seulement si le système suivant admet une solution t unique.

$$\begin{cases} 1 = 1 - t \\ 0 = 2t \\ 2 = 2 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 - 1 \\ t = 0 \\ t = 2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0$$

Ainsi, le point C est le point de $\mathscr{D}$ de paramètre $t = 0$.

2. On admet que D(2 ; -2 ; 3) appartient à $\mathscr{D}$.
   Démontrer qu'il existe deux réels uniques α et β tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Il existe deux réels uniques α et β tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AC}$ si et seulement si le système suivant admet un couple de solutions unique.

$$\begin{cases} 2 = 0\alpha + 1\beta \\ -3 = -1\alpha - 1\beta \\ 3 = -1\alpha + 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ -\alpha - \beta = -3 \\ -\alpha + 2\beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ -\alpha - 2 = -3 \\ -\alpha + 4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ -\alpha = -1 \\ -\alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Ainsi, on a : $\overrightarrow{AD} = 1\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC}$

3. En déduire les positions relatives de la droite $\mathscr{D}$ et du plan $\mathscr{P}$.

$\overrightarrow{AD} = 1\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC}$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.
Le point D appartient donc au plan (ABC), c'est à dire au plan $\mathscr{P}$.
Le point C étant lui aussi dans $\mathscr{P}$, la droite (CD) est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.
Enfin, C et D appartenant à la droite $\mathscr{D}$ on en déduit que $\mathscr{D}$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.