Nom :
Prénom :

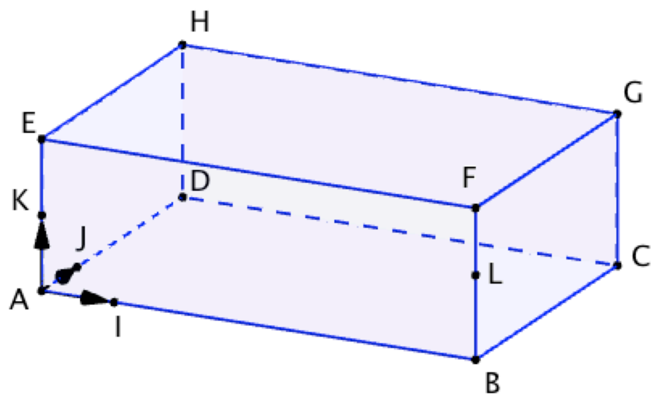
DS n°3
le 22/11/2016

Classe :
T S …

Connaissances / Compétences évaluées	Avis de l'élève Oui	Avis de l'élève Non	Avis du professeur Oui	Avis du professeur Non
Connaitre la définition d'un repère orthonormé.				
Déterminer les coordonnées de points dans l'espace.				
Donner une représentation paramétrique d'un plan / d'une droite.				
Déterminer les coordonnées du point d'intersection d'un plan et d'une droite.				
Tracer la section d'un solide par un plan.				
Connaître les formules de géométrie.				
Déterminer si des points sont coplanaires ou non.				
Justifier l'ensemble de dérivabilité d'une fonction.				
Calculer des dérivées.				
Etudier le signe d'une expression.				
Etudier les variations d'une fonction.				
Déterminer l'équation d'une tangente / Tracer une tangente.				
Comprendre un algorithme / Donner et interpréter le résultat affiché.				
Compétences générales évaluées				
Prises d'initiatives.				
Maîtrise des calculs				
Qualité de la rédaction des réponses / Rigueur / Justifier / Argumenter				

Barème	Ex 1 : 7 points	Ex 2 : 6 points	Ex 3 : 7 points	Total : 20 points
Note de l'élève				

Exercice 1 : On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous pour lequel : AB = 6, AD = 4 et AE = 2.



I, J et K sont les points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

Partie A :

1. Justifier que $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$ est un repère de l'espace et qu'il est orthonormé.
2. Déterminer les coordonnées des points A, I, J, K, B, C, D, E, F, G et H dans ce repère.
3. Déterminer une représentation paramétrique du plan (IJG) et de la droite (BF).
4. L est le point d'intersection du plan (IJG) et de la droite (BF).
   a) Déterminer les coordonnées de L.
   b) Tracer en rouge la section du pavé droit ABCDEFGH par le plan (IJG) sur la figure ci-dessus.
   On ne demande pas de justification.

Partie B :

Soient M et N les points des arêtes [GH] et [EH] tels que GM = EN = x.
Déterminer la ou les positions de M et N pour que le volume de la pyramide NHDAM soit le tiers de celui du pavé droit.

Exercice 2 : Vrai / Faux

On se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne :

A (1 ; 3 ; 2) B (-1 ; 3 ; 3) C (0 ; 3 ; -2) D (2 ; -2 ; 0) E (8 ; -2 ; -3)

Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Vous justifierez vos réponses.

- Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite (BD) est :
$$\begin{cases} x = 5 - 6t \\ y = 10t - 7 \\ z = 6t - 3 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$
- Affirmation 2 : Le plan (ABC) est parallèle au plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
- Affirmation 3 : Il y a une infinité de plans parallèles à la droite (AB) et passant par les points D et E.
- Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.
- Affirmation 5 : Le triangle ABC est isocèle et rectangle.
- Affirmation 6 : Les points A, B, D et E sont coplanaires.

Exercice 3 : Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1 : f est la fonction définie par $f(x) = -1 + \frac{10}{x} - \frac{16}{x^2}$.

a) Donner l'ensemble de définition de f puis justifier sa dérivabilité.

b) Dresser le tableau des variations complet de f.

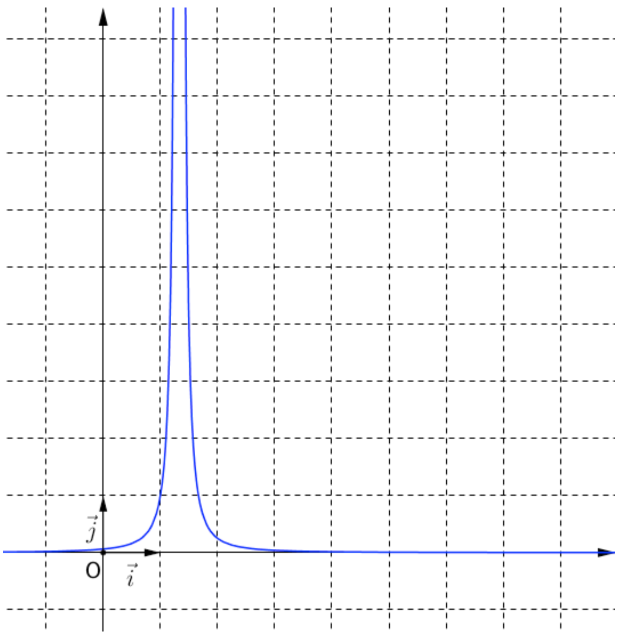
Partie 2 : On pose $g : x \mapsto \sqrt{2x^2 - 7x + 3}$.

a) Justifier que la fonction g est définie sur $I = [3 ; +\infty[$.

b) Déterminer l'intervalle sur lequel g est dérivable puis calculer $g'(x)$.

c) En déduire les variations de g sur I.

Partie 3 : On donne dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}h$ de la fonction définie sur $]-\infty ; \frac{4}{3}[\cup]\frac{4}{3} ; +\infty[$ par $h(x) = (3x - 4)^{-2}$.



a) Justifier l'ensemble de dérivabilité de la fonction h.

b) Déterminer les variations de h sur $]-\infty ; \frac{4}{3}[\cup]\frac{4}{3} ; +\infty[$.

c) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}h$ au point A d'abscisse 1. Tracer (T) sur le graphique.

d) On donne l'algorithme suivant :

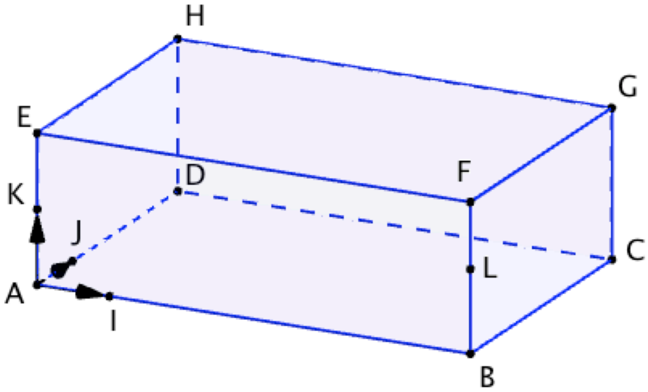
Variables :	x et y sont deux réels
Initialisation :	x prend la valeur 2 y prend la valeur $\frac{1}{4}$
Traitement :	Tant que $y > 10^{-4}$ x prend la valeur $x + 0,1$ y prend la valeur $\frac{1}{(3x-4)^2}$ Fin tant que
Sortie :	Afficher x

Que fait cet algorithme ?

Donner puis interpréter graphiquement le résultat affiché.

Correction du DS n°3

Exercice 1 : On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous pour lequel : AB = 6, AD = 4 et AE = 2.



I, J et K sont les points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

Partie A :

1. Puisque ABCDEFGH est un pavé droit, les vecteurs non coplanaires $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont deux à deux orthogonaux. De plus :
   - AB = 6 et : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$ donc : $\|\overrightarrow{AI}\| = 1$
   - AD = 4 et : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ donc : $\|\overrightarrow{AJ}\| = 1$
   - AE = 2 et : $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ donc : $\|\overrightarrow{AK}\| = 1$

   On en déduit que les vecteurs deux à deux orthogonaux $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont unitaires.

   Ainsi $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$ est un repère orthonormé de l'espace.

2. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$ on a :
   - A (0 ; 0 ; 0)
   - I (1 ; 0 ; 0)
   - J (0 ; 1 ; 0)
   - K (0 ; 0 ; 1).
   - Puisque : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$ alors : $\overrightarrow{AB} = 6\ \overrightarrow{AI} + 0\ \overrightarrow{AJ} + 0\ \overrightarrow{AK}$. On en déduit : B (6 ; 0 ; 0).
   - Puisque : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ alors : $\overrightarrow{AD} = 0\ \overrightarrow{AI} + 4\ \overrightarrow{AJ} + 0\ \overrightarrow{AK}$. On en déduit : D (0 ; 4 ; 0).
   - Puisque : $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ alors : $\overrightarrow{AE} = 0\ \overrightarrow{AI} + 0\ \overrightarrow{AJ} + 2\ \overrightarrow{AK}$. On en déduit : E (0 ; 0 ; 2).

   D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

   Or, puisque ABCDEFGH est un pavé droit, alors ABCD est un rectangle et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.
   Donc :
   - $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 6\ \overrightarrow{AI} + 4\ \overrightarrow{AJ} + 0\ \overrightarrow{AK}$. On en déduit : C (6 ; 4 ; 0).

   De même :
   - $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = 6\ \overrightarrow{AI} + 0\ \overrightarrow{AJ} + 2\ \overrightarrow{AK}$. On en déduit : F (6 ; 0 ; 2).
   - $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD} = 6\ \overrightarrow{AI} + 4\ \overrightarrow{AJ} + 2\ \overrightarrow{AK}$. On en déduit : G (6 ; 4 ; 2).
   - $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 0\ \overrightarrow{AI} + 4\ \overrightarrow{AJ} + 2\ \overrightarrow{AK}$. On en déduit : H (0 ; 4 ; 2).

3. Le plan (IJG) passe par I (1 ; 0 ; 0) et est dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$.

   On en déduit une représentation paramétrique de (IJG) : $\begin{cases} x = 1 - t + 5t' \\ y = t + 4t' \\ z = 2t' \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$.

La droite (BF) passe par B (6 ; 0 ; 0) et est dirigée par $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$.

On en déduit une représentation paramétrique de (BF) : $\begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \\ z = 2t'' \end{cases}$ avec $t'' \in \mathbb{R}$.

4. L est le point d'intersection du plan (IJG) et de la droite (BF).

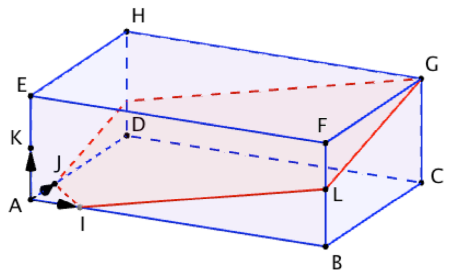
a) Les coordonnées de L vérifient les systèmes $\begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \\ z = 2t'' \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 1 - t + 5t' \\ y = t + 4t' \\ z = 2t' \end{cases}$ où t, t' et t'' sont trois réels à déterminer. Pour cela, on résout :

$$\begin{cases} 1 - t + 5t' = 6 \\ t + 4t' = 0 \\ 2t' = 2t'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t + 5t' = 5 \\ t = -4t' \\ t' = t'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t' + 5t' = 5 \\ t = -4t' \\ t' = t'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{5}{9} \\ t = -4t' \\ t' = t'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-20}{9} \\ t' = \frac{5}{9} \\ t'' = \frac{5}{9} \end{cases}$$

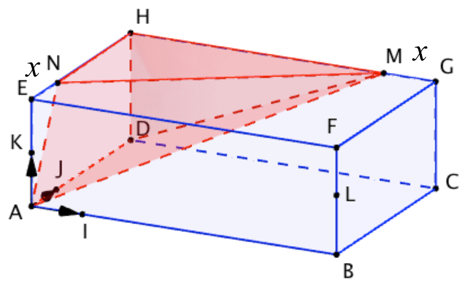
Ainsi, L est le point de (BF) de paramètre $t'' = \frac{5}{9}$. On en déduit le calcul de ses coordonnées :

$\begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \\ z = 2 \times \frac{5}{9} = \frac{10}{9} \end{cases}$. Finalement, L est le point de coordonnées $(6 ; 0 ; \frac{10}{9})$.

b) En rouge la section du pavé droit ABCDEFGH par le plan (IJG) :



<u>Partie B</u> : Soient M et N les points des arêtes [GH] et [EH] tels que GM = EN = x.



Les points M et N appartenant aux arêtes [GH] et [EH] on en déduit : $x \in [0 ; 4]$.
ADHN est un trapèze de petite base NH, de grande base AD et de hauteur DH.
Son aire s'exprime en fonction de x par : $\mathcal{A} = \frac{(\text{NH}+\text{AD})\times\text{DH}}{2} = \frac{(4-x+4)\times 2}{2} = 8 - x$
Le volume de la pyramide NHDAM est : $\mathcal{V}_{\text{NHDAM}} = \frac{1}{3}\mathcal{A} \times \text{HM} = \frac{(8-x)(6-x)}{3}$
Le volume du pavé droit ABCDEFGH est : $\mathcal{V}$ = AB × AD × AE = 6 × 4 × 2 = 48.
Le volume de la pyramide NHDAM est le tiers de celui du pavé droit si et seulement si :
$\frac{(8-x)(6-x)}{3} = \frac{48}{3} \Leftrightarrow (8-x)(6-x) = 48 \Leftrightarrow 48 - 8x - 6x + x^2 = 48 \Leftrightarrow x^2 - 14x = 0$
Ce qui équivaut à : $x(x-14) = 0$
Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul donc : $x = 0$ ou $x = 14$.
La seule solution appartenant à l'intervalle [0 ; 4] est $x = 0$.
On en déduit que pour que le volume de la pyramide NHDAM soit le tiers de celui du pavé droit il faut et il suffit que M soit confondu avec G et que N soit confondu avec E.
La pyramide NHDAM est alors confondu avec la pyramide EHDAG.

Exercice 2 : On donne : A (1 ; 3 ; 2)   B (-1 ; 3 ; 3)   C (0 ; 3 ; -2)   D (2 ; -2 ; 0)   E (8 ; -2 ; -3)
Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Vous justifierez vos réponses.

- Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite (BD) est :

$$\begin{cases} x = 5 - 6t \\ y = 10t - 7 \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}. \\ z = 6t - 3 \end{cases}$$

La représentation paramétrique donnée est celle d'une droite (d).
On vérifie si B et D appartiennent à cette droite.

$$\begin{cases} -1 = 5 - 6t \\ 3 = 10t - 7 \\ 3 = 6t - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t = 6 \\ 10t = 10 \\ 6t = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$ Donc B est le point de (d) de paramètre $t = 1$.

$$\begin{cases} 2 = 5 - 6t \\ -2 = 10t - 7 \\ 0 = 6t - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t = 3 \\ 10t = 5 \\ 6t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0,5 \\ t = 0,5 \\ t = 0,5 \end{cases}$$ Donc D est le point de (d) de paramètre $t = 0,5$.

Ainsi, la droite (BD) et la droite (d) sont confondues et **l'affirmation 1 est vraie.**

Remarque : On peut se contenter de vérifier qu'un seul des points B et D appartient à (d) en justifiant que le vecteur directeur $\vec{u}$ qui apparaît dans la représentation paramétrique de (d) est colinéaire à $\overrightarrow{BD}$.

- Affirmation 2 : Le plan (ABC) est parallèle au plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc : $\overrightarrow{AB} = -2\,\vec{i} + 1\,\vec{k}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc : $\overrightarrow{AC} = -1\,\vec{i} - 4\,\vec{k}$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\vec{i}$ et $\vec{k}$ sont coplanaires.
Ainsi le plan (ABC) est parallèle au plan $(O; \vec{i}, \vec{k})$, non à $(O; \vec{i}, \vec{j})$. **L'affirmation 2 est fausse.**

Remarque : On peut aussi constater : $y_A = y_B = y_C = 3$.
On conclut en disant que le plan (ABC) a pour équation $y = 3$ et est parallèle à $(O; \vec{i}, \vec{k})$, non à $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Affirmation 3 : Il y a une infinité de plans parallèles à la droite (AB) et passant par les points D et E.

On connait : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. De plus : $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Donc : $\overrightarrow{DE} = -3\,\overrightarrow{AB}$.

On en déduit que les droites (DE) et (AB) sont parallèles et qu'il existe une infinité de plans parallèles à (AB) passant par les points D et E. **L'affirmation 3 est vraie.**

- Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

On connait : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. De plus : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$. On a : $\frac{-2}{2} \neq \frac{0}{-5} \neq \frac{1}{2}$. Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires

Donc (AB) et (CD) ne sont pas parallèles. Mais cela ne signifie pas, dans l'espace, qu'elles sont sécantes.
Déterminons s'il existe un point d'intersection à partir des représentations paramétriques des droites.

La droite (AB) passe par A (1 ; 3 ; 2) et est dirigée par $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc : (AB) : $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 \\ z = 2 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

La droite (CD) passe par C (0 ; 3 ; -2) et est dirigée par $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc : (CD) : $\begin{cases} x = 2t' \\ y = 3 - 5t' \\ z = -2 + 2t' \end{cases}$, $t' \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2t' = 1 - 2t \\ 3 - 5t' = 3 \\ -2 + 2t' = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 1 - 2t' \\ 5t' = 0 \\ t = 2t' - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 1 \\ t' = 0 \\ t = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t' = 0 \\ t = -4 \end{cases}$$

Puisque $\frac{1}{2} \neq -4$, le système n'a pas de solution. Ainsi, les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.
Elles ne sont pas coplanaires et **l'affirmation 4 est fausse.**

- Affirmation 5 : Le triangle ABC est isocèle et rectangle.

On connait : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\-4\end{pmatrix}$.

On en déduit : AB = $\sqrt{(-2)^2+0^2+1^2}=\sqrt{5}$ et : AC = $\sqrt{(-1)^2+0^2+(-4)^2}=\sqrt{17}$

De même : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\0\\-5\end{pmatrix}$ donc : BC = $\sqrt{1^2+0^2+(-5)^2}=\sqrt{26}$

AB ≠ AC ≠ BC. Le triangle ABC n'est pas isocèle donc **l'affirmation 5 est fausse.**

- Affirmation 6 : Les points A, B, D et E sont coplanaires.

On connait : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ et : $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix}$. De plus : $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\-5\\-2\end{pmatrix}$.

Vérifions s'il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{DE}+\beta\overrightarrow{AD}$:

$$\begin{cases}6\alpha+\beta=-2\\-5\beta=0\\-3\alpha-2\beta=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6\alpha=-2\\\beta=0\\-3\alpha=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}\\\beta=0\\\alpha=\frac{-1}{3}\end{cases}$$

On a donc : $\overrightarrow{AB}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{DE}+0\overrightarrow{AD}$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Ainsi, les points A, B, D et E sont coplanaires et **l'affirmation 6 est vraie.**

Autres méthodes :

- On peut définir une représentation paramétrique du plan (ABD) et vérifier que E appartient à ce plan.
- On définit la position relative de deux droites formées par ces 4 points et on montre qu'elles sont coplanaires en déterminant si elles sont parallèles ou sécantes. Avec cette méthode, on réalise qu'on avait déjà justifié, pour l'affirmation 3, que les droites (AB) et (DE) sont parallèles parce que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.

Exercice 3 : Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1 : f est la fonction définie par $f(x)=-1+\frac{10}{x}-\frac{16}{x^2}$.

a) $f(x)=-1+\frac{10}{x}-\frac{16}{x^2}=\frac{-x^2+10x-16}{x^2}$

f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}^*$ donc f est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

b) $\forall\, x\in\,]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$, $f(x)=\frac{-x^2+10x-16}{x^2}=\frac{u(x)}{v(x)}$

$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}$ avec $\begin{cases}u(x)=-x^2+10x-16\\v(x)=x^2\end{cases}$ et $\begin{cases}u'(x)=-2x+10\\v'(x)=2x\end{cases}$

$f'(x)=\frac{(-2x+10)x^2-2x(-x^2+10x-16)}{(x^2)^2}=\frac{-2x^3+10x^2+2x^3-20x^2+32x}{x^4}=\frac{-10x+32}{x^3}$

Autre méthode : On dérive directement à partir de la forme de $f(x)$ donnée au départ.

On a : $f(x)=-1+\frac{10}{x}-\frac{16}{x^2}=-1+10\times\frac{1}{x}-16\times x^{-2}$

Donc : $f'(x)=0+10\times\frac{-1}{x^2}-16\times(-2)\times x^{-3}=\frac{-10}{x^2}+\frac{32}{x^3}=\frac{-10x+32}{x^3}$

3 est un exposant impair donc x^3 est du même signe que x sur]-∞ ; 0[et sur]0 ; +∞[.

$-10x+32>0 \Leftrightarrow 32>10x \Leftrightarrow x<\frac{32}{10} \Leftrightarrow x<\frac{16}{5}$

$f(\frac{16}{5}) = -1+10\times\frac{5}{16}-16\times(\frac{5}{16})^2 = -1+\frac{50}{16}-\frac{25}{16} = \frac{-16+50-25}{16} = \frac{9}{16}$.

x	$-\infty$		0		$\frac{16}{5}$		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$		$+$	
$-10x+32$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	$\|\|$	$\nearrow$	$\frac{9}{16}$	$\searrow$	

Partie 2 : On pose $g : x \mapsto \sqrt{2x^2-7x+3}$.

a) g est définie si et seulement si $2x^2-7x+3 \geq 0$.

On calcule le discriminant : $\Delta = b^2-4ac = (-7)^2-4\times2\times3 = 49-24 = 25 > 0$

On en déduit le calcul des racines : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$ et : $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+5}{4} = 3$.

Le trinôme $2x^2-7x+3$ est du signe contraire de $a=2$, c'est-à-dire négatif, entre ses racines.

On en déduit :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x^2-7x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, g est définie sur]-∞ ; $\frac{1}{2}$] ∪ [3 ; +∞[. Donc g est définie sur I = [3 ; +∞[.

b) ∀ $x \in$]-∞ ; $\frac{1}{2}$] ∪ [3 ; +∞[, $g(x) = \sqrt{2x^2-7x+3} = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 2x^2-7x+3$.

La fonction u est positive et ne s'annule pas sur]-∞ ; $\frac{1}{2}$[ni sur]3 ; +∞[.

Donc g est dérivable sur]-∞ ; $\frac{1}{2}$[et sur]3 ; +∞[.

$g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{4x-7}{2\sqrt{2x^2-7x+3}}$

c) $2>0$ et ∀ $x \in$]3 ; +∞[, $\sqrt{2x^2-7x+3} > 0$. Donc $g'(x)$ est du signe de $4x-7$ sur]3 ; +∞[.

$4x-7>0 \Leftrightarrow x>\frac{7}{4}$.   Or : $\frac{7}{4} = 1{,}75 < 3$

On en déduit que g' est positive sur]3 ; +∞[et que, par conséquent, g est croissante sur I = [3 ; +∞[.

Remarque : On peut placer le signe de $g'(x)$ et les variations de g dans un tableau de variations en faisant attention ! g' n'est pas définie en 3 mais g est définie en 3 avec $g(3) = \sqrt{0} = 0$.

x	3		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	
g	0	$\nearrow$	

Partie 3 : On donne dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}h$ de la fonction définie sur $]-\infty ; \frac{4}{3}[\cup]\frac{4}{3} ; +\infty[$ par $h(x) = (3x-4)^{-2}$.

a) $h(x) = (3x-4)^{-2} =$ avec $u(x) = 3x - 4$.
L'exposant -2 étant négatif, la fonction h n'est définie et dérivable que sur les intervalles où u ne s'annule pas.

$3x - 4 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \frac{4}{3}$

Donc h est dérivable sur $]-\infty ; \frac{4}{3}[$ et sur $]\frac{4}{3} ; +\infty[$.

Remarque : Si l'exposant avait été positif, h aurait été une fonction polynôme définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Autre justification possible de la dérivabilité : $h(x) = (3x-4)^{-2} = \frac{1}{(3x-4)^2}$.
Donc h est une fonction rationnelle et par conséquent h est dérivable sur son ensemble de définition.

b) $\forall\, x \in]-\infty ; \frac{4}{3}[\cup]\frac{4}{3} ; +\infty[$, $h'(x) = -2\,u'(x)[u(x)]^{-3}$

$h'(x) = -2 \times 3 \times (3x-4)^{-3} = \frac{-6}{(3x-4)^3}$

L'exposant 3 étant impair, $(3x-4)^3$ et $3x-4$ ont le même signe.

Le coefficient directeur 3 étant positif, $3x - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{4}{3}$

On en déduit :

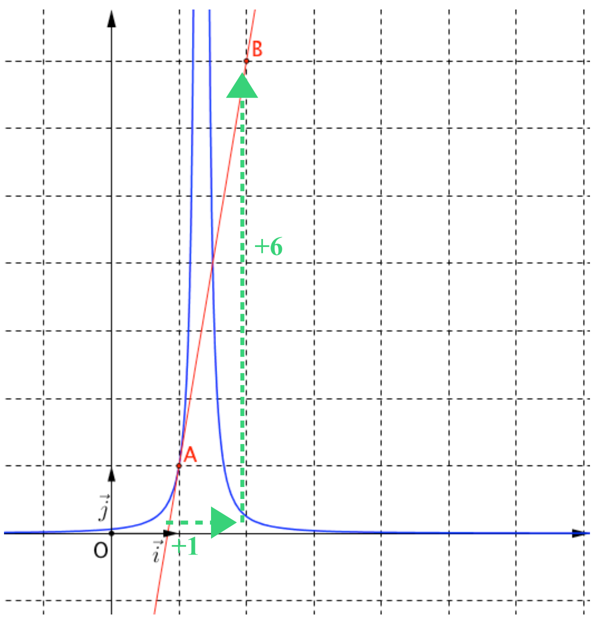
x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
-6		$-$		$-$	
$(3x-4)^3$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	
h		$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$	

c) $h'(1) = \frac{-6}{(3-4)^3} = \frac{-6}{(-1)^3} = \frac{-6}{-1} = 6$ et : $h(1) = (3-4)^{-2} = (-1)^{-2} = \frac{1}{(-1)^2} = 1$

Donc l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}h$ au d'abscisse 1 est :

$y = h'(1)(x-1) + h(1)$
$y = 6(x-1) + 1$
$y = 6x - 5$

Méthode : On peut tracer (T) en partant de A en utilisant le coefficient directeur 6 pour passer par B.
Le coefficient directeur étant entier, pour passer de A à B, on « avance » de 1 et on « monte » de 6.



d) On donne l'algorithme suivant :

Variables :	x et y sont deux réels
Initialisation :	x prend la valeur 2 y prend la valeur $\frac{1}{4}$
Traitement :	Tant que $y > 10^{-4}$ x prend la valeur $x + 0,1$ y prend la valeur $\frac{1}{(3x-4)^2}$ Fin tant que
Sortie :	Afficher x

$h(2) = (3 \times 2 - 4)^{-2} = (2)^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Avec cet algorithme, on rentre dans une boucle pour calculer régulièrement les images y de x, en initialisant à $x = 2$, avec un pas de 0,1 et tant que les images calculées dépassent $10^{-4} = 0{,}0001$. L'algorithme finit par afficher la première valeur du réel x, à 0,1 près, telle que $h(x) \leq 0{,}0001$.

En exécutant cet algorithme à l'aide de la calculatrice, ou en utilisant le tableur on détermine $x = 34,7$.

Cela signifie que la distance entre la courbe et l'axe des abscisses devient inférieure ou égale à 0,0001 sur l'intervalle $[34{,}7 ; +\infty]$