Nom : *Classe* : 2nde	**Devoir surveillé n°4** le 14/12/2015	*Note* : … / 20

	Avis de l'élève		*Avis du professeur*	
Je sais :	***Oui***	***Non***	***Oui***	***Non***
Exercice 1				
Démontrer qu'une fonction peut s'écrire sous différentes formes.				
Déterminer les antécédents éventuels d'un nombre par une fonction.				
Démontrer qu'une fonction admet un extremum sur ℝ.				
Exercice 2				
Démontrer qu'une droite est parallèle à un plan.				
Démontrer que deux plans sont parallèles.				
Démontrer qu'un point appartient à un plan.				
Construire l'intersection de deux plans.				
Exercice 3				
Exprimer / Calculer des volumes.				
Exercice 4				
Rédiger un raisonnement par l'absurde.				

<u>Exercice 1</u> : *f* est la fonction définie sur ℝ par $f(x)=\frac{-1}{5}x^2+\frac{4}{5}x+\frac{21}{5}$. **… / 7**

1) a) Démontre que pour tout réel x on a : $f(x)=\frac{-1}{5}(x-2)^2+5$. (1 point)

b) Démontre que pour tout réel x on a : $f(x)=\frac{-1}{5}(x+3)(x-7)$. (1 point)

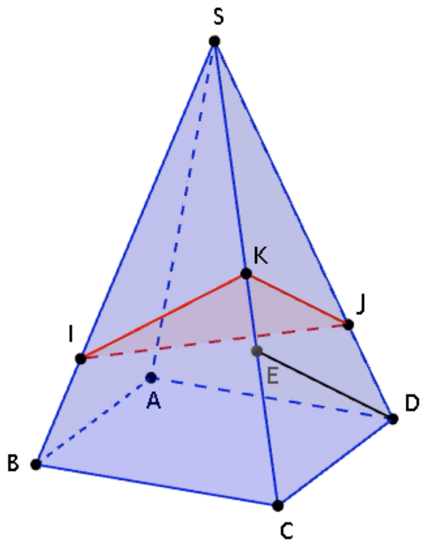
2) Détermine les antécédents éventuels de 0 puis de $\frac{21}{5}$ par *f*. (2,5 points)

3) a) Calcule l'image de 2 par *f*. (0,5 point)

b) Justifie que $f(x)-f(2)$ est de signe constant sur ℝ. (1 point)

c) Déduis-en que *f* admet un extremum (à préciser) sur ℝ. (1 point)

<u>Exercice 2</u> : **… / 8**



SABCD est une pyramide à base carrée.

I et J sont les points des arêtes [SB] et [SD] tels que SI = $\frac{3}{4}$ SB et SJ = $\frac{3}{4}$ SD. K est le milieu de [SC]. La parallèle à (JK) passant par D coupe [SC] en E.

1) Démontre que : (IJ) // (BDE). (2 points)

2) Démontre que les plans (IJK) et (BDE) sont parallèles. (1 point)

3) On note O le milieu de [BD] et (d) = (BDE) ∩ (SAC).

a) Démontre que : O ∈ (d) (2 points)

b) Détermine un autre point de (d) puis trace (d). (1 point)

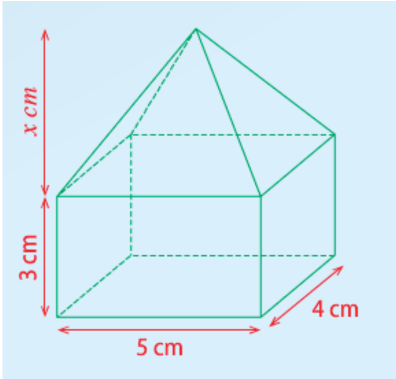
4) On note (Δ) = (IJK) ∩ (SAC).

a) Que peux tu dire de (d) et (Δ) ? Justifie. (1 point)

b) Déduis en la construction de (Δ) sur la figure ci-contre. (1 point)

Exercice 3 : **… / 5**

1) Un parallélépipède rectangle de dimensions 3, 4 et 5 cm est surmonté d'une pyramide de hauteur x cm.



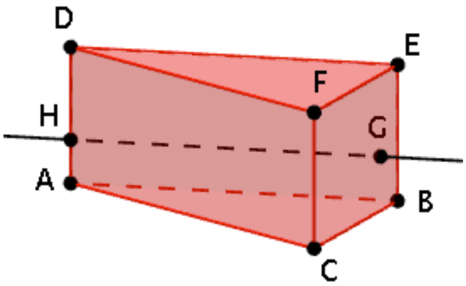
a) Exprime en fonction de x le volume de ce solide. (1,5 point)

b) Détermine la valeur de x pour que ce volume soit égal à 80 cm^3. (1,5 point)

2) Un jouet pour enfant de type « culbuto » est constitué d'une demi-boule de rayon 3 cm surmontée d'un cône de même rayon et de hauteur 7 cm. Calcule le volume de ce jouet. (2 points)

Bonus : Raisonnement par l'absurde. **… / 2**

ABCDEF est un prisme droit. H est un point de l'arête [AD]. G est un point du plan (BCE) qui n'appartient à aucune des droites (BC), (CF), (FE) et (EB).



Démontre par l'absurde que les droites (AB) et (HG) ne peuvent pas être coplanaires

Correction du DS n°4

Exercice 1 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{-1}{5}x^2+\frac{4}{5}x+\frac{21}{5}$.

1) a) Démontre que pour tout réel x on a : $f(x)=\frac{-1}{5}(x-2)^2+5$.

$$A=\frac{-1}{5}(x-2)^2+5=\frac{-1}{5}(x^2-4x+4)+5=\frac{-1}{5}x^2+\frac{4}{5}x-\frac{4}{5}+\frac{25}{5}=\frac{-1}{5}x^2+\frac{4}{5}x+\frac{21}{5}=f(x)$$

b) Démontre que pour tout réel x on a : $f(x)=\frac{-1}{5}(x+3)(x-7)$.

$$B=\frac{-1}{5}(x+3)(x-7)=\frac{-1}{5}(x^2-7x+3x-21)=\frac{-1}{5}(x^2-4x-21)=\frac{-1}{5}x^2+\frac{4}{5}x+\frac{21}{5}=f(x)$$

2) Détermine les antécédents éventuels de 0 puis de $\frac{21}{5}$ par f.

$f(x)=0$

$\frac{-1}{5}(x+3)(x-7)=0$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Or : $-\frac{1}{5}\neq 0$ Donc : $x+3=0$ ou $x-7=0$

On en déduit : $x=-3$ ou $x=7$

Les antécédents de 0 par f sont -3 et 7.

$f(x)=\frac{21}{5}$

$\frac{-1}{5}x^2+\frac{4}{5}x+\frac{21}{5}=\frac{21}{5}$

$\frac{-1}{5}x^2+\frac{4}{5}x=0$

$\frac{-1}{5}x(x-4)=0$

On en déduit : $x=0$ ou $x-4=0$

$x=0$ ou $x=4$

Les antécédents de $\frac{21}{5}$ par f sont 0 et 4.

3) a) Calcule l'image de 2 par f.

$$f(2)=\frac{-1}{5}(2-2)^2+5=-\frac{1}{5}\times 0+5=5$$

b) Justifie que $f(x)-f(2)$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)-f(2)=\frac{-1}{5}(x-2)^2+5-5=-\frac{1}{5}(x-2)^2$$

Or : $-\frac{1}{5}<0$ et un carré est toujours positif ou nul.

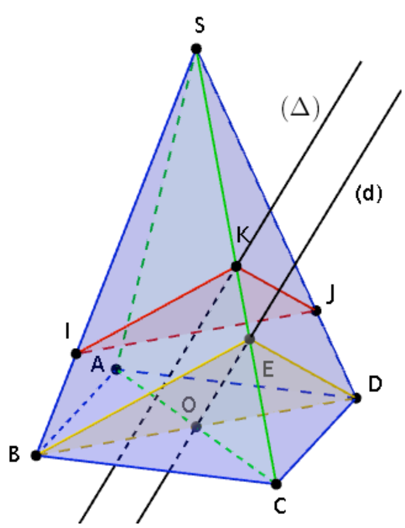
Donc : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)-f(2)\leq 0$

c) Déduis-en que f admet un extremum (à préciser) sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)-f(2)\leq 0$$
$$f(x)\leq f(2)$$
$$f(x)\leq 5$$

On en déduit que f admet pour maximum M = 5. Il est atteint en $x=2$ car $f(2)=5$.

Exercice 2 :



1) Démontre que : (IJ) // (BDE).

Dans le triangle SBD :

- I ∈ [SB] et SI = $\frac{3}{4}$ SB donc $\frac{SI}{SB}=\frac{3}{4}$
- J ∈ [SD] et SJ = $\frac{3}{4}$ SD donc $\frac{SJ}{SD}=\frac{3}{4}$

On en déduit $\frac{SJ}{SD}=\frac{SI}{SB}$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès : (IJ) // (BD).

De plus : (BD) ⊂ (BDE)

Or, si une droite (d) est parallèle à une droite (Δ) incluse dans un plan $\mathscr{P}$ alors (d) est parallèle à $\mathscr{P}$.

Donc : (IJ) // (BDE).

2) Démontre que les plans (IJK) et (BDE) sont parallèles.

On sait que : (IJ) // (BD) et : (KJ) // (ED).

Or si un plan $\mathscr{P}$ contient deux droites sécantes (d) et (d′) parallèles à deux droites sécantes (Δ) et (Δ′) d'un plan $\mathscr{P}'$ alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.

Donc : (IJK) // (BDE)

3) On note O le milieu de [BD] et (d) = (BDE) ∩ (SAC).

a) Démontre que : O ∈ (d)

O est le milieu de [BD] donc : O ∈ (BD). Or : (BD) ⊂ (BDE). Donc : O ∈ (BDE).

ABCD est un carré et dans un carré les diagonales se coupent en leur milieu.

Ainsi, le milieu O de [BD] est aussi celui de [AC].

Donc : O ∈ (AC). Or : (AC) ⊂ (SAC). Donc : O ∈ (SAC).

Finalement, en notant : (d) = (BDE) ∩ (SAC) on a : O ∈ (d).

b) Détermine un autre point de (d) puis trace (d).

E ∈ (SC) et (SC) ⊂ (SAC). Donc : E ∈ (SAC).

E ∈ (DE) et (DE) ⊂ (BDE). Donc : E ∈ (BDE).

Finalement : E ∈ (d).

On en déduit que les droites (d) et (OE) sont confondues.

4) On note (Δ) = (IJK) ∩ (SAC).

a) Que peux tu dire de (d) et (Δ) ? Justifie.

On sait que :

- (IJK) // (BDE)
- (Δ) = (IJK) ∩ (SAC)
- (d) = (BDE) ∩ (SAC).

Or, si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles et si un 3ᵉ plan $\mathscr{S}$ coupe $\mathscr{P}$ alors il coupe aussi $\mathscr{Q}$ et leurs droites d'intersection sont parallèles.

Donc : (d) // (Δ).

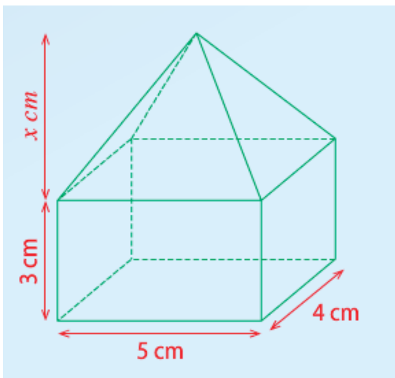
b) Déduis en la construction de (Δ) sur la figure ci-contre.

Le point K appartient aux droites (SC) et (JK). Donc K appartient à (IJK) ∩ (SAC).

On construit (Δ) en traçant la parallèle à (d) passant par K.

Exercice 3 :

1) Un parallélépipède rectangle de dimensions 3, 4 et 5 cm est surmonté d'une pyramide de hauteur x cm.



a) Exprime en fonction de x le volume de ce solide.

Le volume $\mathscr{V}_1$ du parallélépipède rectangle est :

$\mathscr{V}_1 = L \times l \times h = 3 \times 4 \times 5 = 60 \text{ cm}^3$

Le volume $\mathscr{V}_2$ de la pyramide est :

$\mathscr{V}_2 = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h = \frac{1}{3} \times 4 \times 5 \times x = \frac{20}{3} x \text{ cm}^3$

Donc, le volume $\mathscr{V}$ du solide est : $\mathscr{V} = \mathscr{V}_1 + \mathscr{V}_2 = 60 + \frac{20}{3} x \text{ cm}^3$

b) Détermine la valeur de x pour que ce volume soit égal à 80 cm³.

$\mathscr{V} = 80$

$60 + \frac{20}{3} x = 80$

$\frac{20}{3} x = 80 - 60$

$\frac{20}{3} x = 20$

$x = 20 \times \frac{3}{20}$

$x = 3$

La hauteur de la pyramide doit-être de 3 cm.

2) Un jouet pour enfant de type « culbuto » est constitué d'une demi-boule de rayon 3 cm surmontée d'un cône de même rayon et de hauteur 7 cm. Calcule le volume de ce jouet.

Le volume $\mathcal{V}_3$ de la demi-boule est :

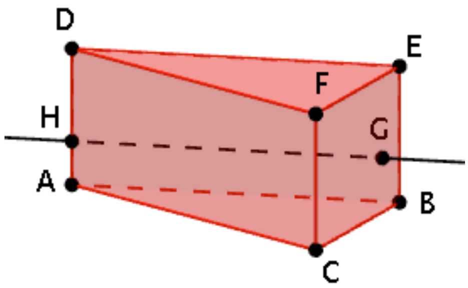
$$\mathcal{V}_3 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times r^3 = \frac{2}{3} \times 3^3 \pi = 18 \pi \text{ cm}^3$$

Le volume $\mathcal{V}_2$ du cône est :

$$\mathcal{V}_4 = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 7 = 21 \pi \text{ cm}^3$$

Donc, le volume $\mathcal{V}'$ du jouet est : $\mathcal{V}' = \mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_4 = 18 \pi + 21 \pi = 39 \pi \text{ cm}^3$

Bonus : Raisonnement par l'absurde.
ABCDEF est un prisme droit. H est un point de l'arête [AD]. G est un point du plan (BCE) qui n'appartient à aucune des droites (BC), (CF), (FE) et (EB).



Démontre par l'absurde que les droites (AB) et (HG) ne peuvent pas être coplanaires

Supposons que les droites (AB) et (HG) sont coplanaires, c'est-à-dire incluses dans un même plan.
Puisque les points A, B et H appartiennent au plan (ABED) le point G appartiendrait lui aussi au plan (ABED).
Or, G est un point du plan (BCE) que l'on peut aussi nommer (BCFE).
Donc G appartiendrait à l'intersection des plans (ABED) et (BCFE).
On en déduit que G appartiendrait à la droite (BE).
C'est absurde puisque par hypothèse G n'appartient à aucune des droites (BC), (CF), (FE) et (EB).
Ainsi, les droites (AB) et (HG) ne peuvent pas être coplanaires.