Nom : *Classe* : 2nde	**Devoir surveillé n°4** le 09/02/2018	*Note* : … / 20

Je sais :	*Avis de l'élève* **Oui**	*Avis de l'élève* **Non**	*Avis du professeur* **Oui**	*Avis du professeur* **Non**
Partie algébrique				
Ex 1 (Fait en classe) : Gérer des calculs contenant des racines carrées.				
Démontrer qu'une fonction peut s'écrire sous différentes formes.				
Déterminer les antécédents éventuels d'un nombre par une fonction.				
Démontrer qu'une fonction admet un extremum sur $\mathbb{R}$.				
Partie géométrique				
Ex 3 (Fait en classe) : Représenter un solide en perspective cavalière.				
Ex 4 (Fait en classe) : Se repérer sur la sphère terrestre. Calculer la longueur d'un méridien.				
Démontrer qu'une droite est parallèle à un plan.				
Démontrer que deux plans sont parallèles.				
Justifier qu'un point appartient à l'intersection de deux plans.				
Déterminer / Construire l'intersection de deux plans.				
Exercice Bonus : Calculer une longueur manquante dans un solide de volume donné.				

Exercice 1 : **… / 4**

La calculatrice faisant le travail, un minimum de détails dans les calculs est attendu dans cet exercice.

1. Ecrire les nombres sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers (b étant le plus petit possible).
   a) A = $\sqrt{27}$ b) B = $\sqrt{20}$
2. Simplifier.
   a) A = $2\sqrt{3} \times 6\sqrt{3}$ b) B = $2\sqrt{5} \times 4\sqrt{15}$ c) C = $\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{25}} \times \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$
3. Ecrire sans racine carrée au dénominateur.
   a) A = $\frac{2}{\sqrt{3}}$ b) B = $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ c) C = $\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$

Exercice 2 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-1}{5}x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{21}{5}$ **… / 4,5**

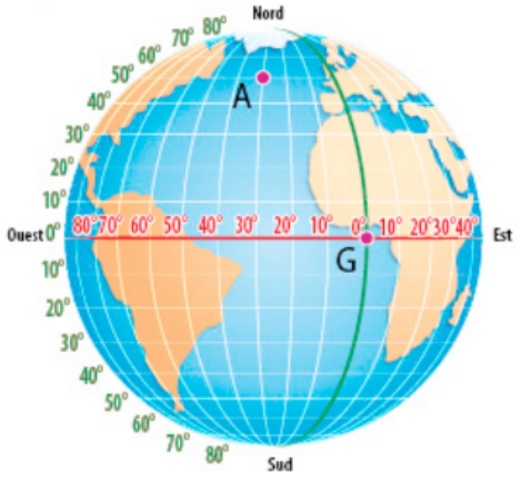
1. a) Démontrer que pour tout réel x on a : $f(x) = \frac{-1}{5}(x-2)^2 + 5$
   b) Démontrer que pour tout réel x on a : $f(x) = \frac{-1}{5}(x+3)(x-7)$
2. Déterminer les antécédents éventuels de 0 puis de $\frac{21}{5}$ par f.
3. a) Calculer l'image de 2 par f.
   b) Justifier que $f(x) - f(2)$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$.
   c) En déduire que f admet un extremum (à préciser) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : ABCDEFGH est un pavé droit tel que AB = 3 cm, AD = 2 cm et AE = 5 cm. **… / 2**
Représenter ce solide en perspective cavalière en dessinant la face ABCD dans un plan frontal et en prenant $k = 0{,}5$ pour coefficient de perspective et $\alpha = 30°$ pour angle de fuite.

Exercice 4 : **… / 4**

Partie A :
Sur le globe terrestre représenté ci-dessous, G est le point d'intersection du méridien de Greenwich avec l'équateur.

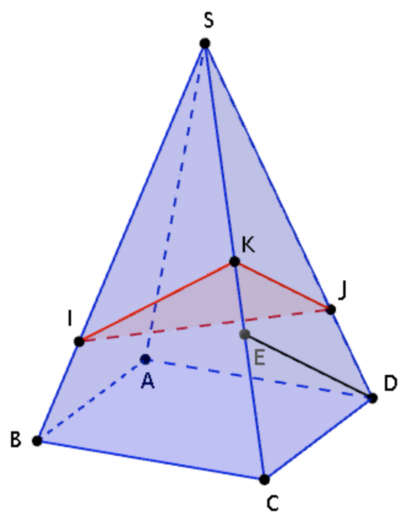
1. Lire les coordonnées géographiques de A.
2. Parti de A, un bateau s'est déplacé sur un parallèle de 40° vers l'est et de 80° vers le sud. Déterminer ses coordonnées.



Partie B :
1. Quelle est la longitude d'un point situé sur l'antiméridien ?
2. Les coordonnées géographiques de la ville d'Auckland en Nouvelle-Zélande sont $(36{,}9\,°\text{S}\,;174{,}8\,°\text{E})$.
   Déterminer les coordonnées du point situé aux antipodes.

Partie C : On assimile la Terre à une sphère de rayon 6 371 km.
Déterminer la longueur d'un méridien.

Exercice 5 : **… / 5,5**

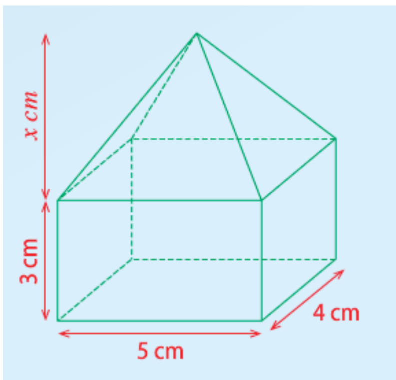


SABCD est une pyramide à base carrée.
I et J sont les points des arêtes [SB] et [SD] tels que SI = $\frac{3}{4}$ SB et SJ = $\frac{3}{4}$ SD. K est le milieu de [SC]. La parallèle à (JK) passant par D coupe [SC] en E.

1. Démontrer que : (IJ) // (BDE).
2. Démontrer que les plans (IJK) et (BDE) sont parallèles.
3. On note (d) la droite d'intersection des plans (BDE) et (SAC).
   a) Soit O le milieu de [BD]. Démontrer que O appartient à (d).
   b) Déterminer un autre point de (d) puis tracer (d).
4. On note $(\Delta) = (IJK) \cap (SAC)$.
   a) Que peut-on dire de (d) et (Δ) ? Justifier.
   b) Tracer (Δ).

Exercice Bonus : **… / 2**
Un parallélépipède rectangle de dimensions 3, 4 et 5 cm est surmonté d'une pyramide de hauteur x cm.

a) Exprimer en fonction de x le volume $\mathcal{V}$ de ce solide.
b) Déterminer la valeur de x pour que ce volume soit égal à 80 cm^3.



Correction du DS n°4

Exercice 1, 3 et 4 : Voir les corrections des exercices correspondants, travaillés en classe.

Exercice 2 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-1}{5}x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{21}{5}$

1. a) Démontrer que pour tout réel x on a : $f(x) = \frac{-1}{5}(x-2)^2 + 5$

$A = \frac{-1}{5}(x-2)^2 + 5 = \frac{-1}{5}(x^2 - 4x + 4) + 5 = \frac{-1}{5}x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{4}{5} + \frac{25}{5} = \frac{-1}{5}x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{21}{5} = f(x)$

b) Démontrer que pour tout réel x on a : $f(x) = \frac{-1}{5}(x+3)(x-7)$

$B = \frac{-1}{5}(x+3)(x-7) = \frac{-1}{5}(x^2 - 7x + 3x - 21) = \frac{-1}{5}(x^2 - 4x - 21) = \frac{-1}{5}x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{21}{5} = f(x)$

2. Déterminer les antécédents éventuels de 0 puis de $\frac{21}{5}$ par f.

$f(x) = 0$

$\frac{-1}{5}(x+3)(x-7) = 0$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

$\frac{-1}{5} \neq 0$ donc : $x + 3 = 0$ ou : $x - 7 = 0$

$x = -3$ ou : $x = 7$

Les antécédents de 0 par f sont -3 et 7.

$f(x) = \frac{21}{5}$

$\frac{-1}{5}x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{21}{5} = \frac{21}{5}$

$\frac{-1}{5}x^2 + \frac{4}{5}x = 0$

$\frac{-1}{5}x(x-4) = 0$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

$\frac{-1}{5} \neq 0$ donc : $x = 0$ ou : $x - 4 = 0$

$x = 0$ ou : $x = 4$

Les antécédents de $\frac{21}{5}$ par f sont 0 et 4.

3. a) Calculer l'image de 2 par f.

$f(2) = \frac{-1}{5}(2-2)^2 + 5 = \frac{-1}{5} \times 0^2 + 5 = 5$

b) Justifier que $f(x) - f(2)$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(2) = f(2) = \frac{-1}{5}(x-2)^2 + 5 - 5 = \frac{-1}{5}(x-2)^2$

$\frac{-1}{5} < 0$ et un carré est toujours positif ou nul.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(2) \leq 0$

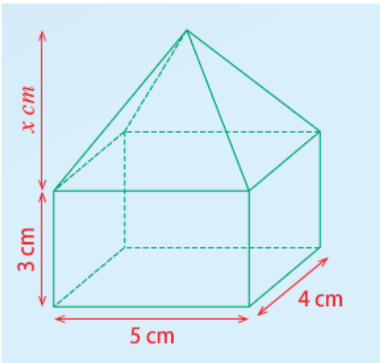
c) En déduire que f admet un extremum (à préciser) sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(2) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow f(x) \leq 5$

On en déduit que f admet 5 pour maximum sur $\mathbb{R}$. Il est atteint en $x = 2$.

Exercice bonus :

Un parallélépipède rectangle de dimensions 3, 4 et 5 cm est surmonté d'une pyramide de hauteur x cm.



a) Exprime en fonction de x le volume de ce solide.

Le volume $\mathcal{V}_1$ du parallélépipède rectangle est :

$\mathcal{V}_1 = L \times l \times h = 3 \times 4 \times 5 = 60$ cm^3

Le volume $\mathcal{V}_2$ de la pyramide est :

$\mathcal{V}_2 = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times 4 \times 5 \times x = \frac{20}{3}x$ cm^3

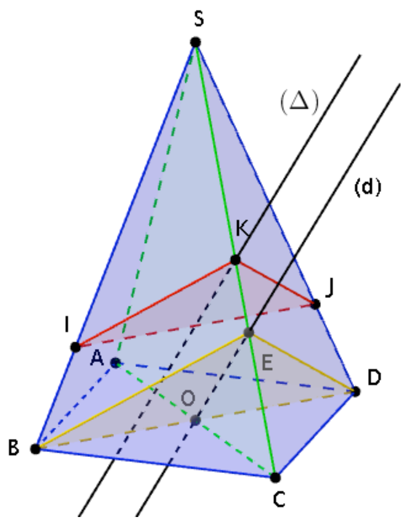
Donc, le volume $\mathcal{V}$ du solide est : $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = 60 + \frac{20}{3}x$ cm^3

b) Détermine la valeur de x pour que ce volume soit égal à 80 cm^3.

$\mathcal{V} = 80 \Leftrightarrow 60 + \frac{20}{3}x = 80 \Leftrightarrow \frac{20}{3}x = 80 - 60 \Leftrightarrow \frac{20}{3}x = 20 \Leftrightarrow x = 20 \times \frac{3}{20} \Leftrightarrow x = 3$

Pour que le volume du solide soit égal à 80 cm^3, la hauteur de la pyramide doit-être de 3 cm.

Exercice 5 :



SABCD est une pyramide à base carrée.
I et J sont les points des arêtes [SB] et [SD] tels que SI = $\frac{3}{4}$ SB et SJ = $\frac{3}{4}$ SD. K est le milieu de [SC]. La parallèle à (JK) passant par D coupe [SC] en E.

1. Démontrer que : (IJ) // (BDE).

Dans le triangle SBD :
- I ∈ [SB] et SI = $\frac{3}{4}$SB donc $\frac{SI}{SB} = \frac{3}{4}$.
- J ∈ [SD] et SJ = $\frac{3}{4}$SD donc $\frac{SJ}{SD} = \frac{3}{4}$.

On en déduit : $\frac{SI}{SB} = \frac{SJ}{SD}$
Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès : (IJ) // (BD).
De plus : (BD) ⊂ (BDE)
Or, si une droite (d) est parallèle à une droite (Δ) incluse dans un plan $\mathscr{P}$ alors (d) est parallèle à $\mathscr{P}$.
Donc : (IJ) // (BDE).

2. Démontrer que les plans (IJK) et (BDE) sont parallèles.

On sait que : (IJ) // (BD) et : (KJ) // (ED).
Or si un plan $\mathscr{P}$ contient deux droites sécantes (d) et (d′) parallèles à deux droites sécantes (Δ) et (Δ′) d'un plan $\mathscr{P}'$ alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.
Donc : (IJK) // (BDE)

3. On note (d) la droite d'intersection des plans (BDE) et (SAC).
   a) Soit O le milieu de [BD]. Démontrer que O appartient à (d).

O est le milieu de [BD] et [BD] est inclus dans (BDE). Donc O appartient à (BDE).
ABCD est un carré et dans un carré les diagonales se coupent en leur milieu.
Ainsi, le milieu O de [BD] est aussi celui de [AC] qui est inclus dans (SAC). Donc O appartient à (SAC).
Finalement : O ∈ (BDE) ∩ (SAC). Donc : O ∈ (d).

   b) Déterminer un autre point de (d) puis tracer (d).

E ∈ (SC) et (SC) ⊂ (SAC). Donc E ∈ (SAC).
E ∈ (DE) et (DE) ⊂ (BDE). Donc E ∈ (BDE).
Finalement E ∈ (d).
On en déduit que la droite (d) est la droite (OE).

4. On note (Δ) = (IJK) ∩ (SAC).
   a) Que peut-on dire de (d) et (Δ) ? Justifier.

On sait que :
- (IJK) // (BDE)
- (SAC) coupe (IJK) selon la droite (Δ)
- (SAC) coupe (BDE) selon la droite (d)

Or, si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles et si un 3^{e} plan $\mathscr{S}$ coupe $\mathscr{P}$ selon une droite (d) alors il coupe aussi $\mathscr{P}'$ selon une droite (d′) parallèle à (d).
Donc : (d) // (Δ).

   b) Tracer (Δ).

Le point K appartient aux droites (SC) et (JK). Donc K appartient à (IJK) ∩ (SAC).
Pour tracer (Δ) on construit la parallèle à (d) passant par K.