Nom : Classe : T ES	**Devoir surveillé n°4** le 18/12/2015	Note : … / 20

La notation du devoir prendra en compte les efforts de soin, de présentation et de rédaction.
Une fois que vous aurez fini ce devoir vous complèterez la grille d'autoévaluation suivante.

	Avis de l'élève		*Avis du professeur*	
Je sais :	***Oui***	***Non***	***Oui***	***Non***
Exercice 1				
Dériver une somme, un quotient.				
Etudier les variations d'une fonction.				
Déterminer l'équation d'une tangente.				
Démontrer qu'une fonction est convexe ou concave sur un intervalle donné.				
Justifier la position relative d'une courbe et d'une tangente.				
Justifier qu'une équation admet une unique solution.				
Utiliser la calculatrice pour encadrer la solution d'une équation.				
Exercice 2				
Dériver un produit.				
Etudier le signe d'un polynôme du 2^{nd} degré.				
Etudier les variations d'une fonction.				
Justifier qu'une courbe admet des tangentes horizontales et déterminer leurs équations.				
Exercice 3				
Démontrer une égalité.				

Exercice 1 : **… / 11**

f et *g* sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3e^x - 7x + 8$ et $g(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x + 2}$.

On note $\mathscr{C}f$ la représentation graphique de *f* dans un repère.

1) a) Etudie les variations de *f* sur $\mathbb{R}$. (1,5 points)
b) Etudie les variations de *g* sur $\mathbb{R}$. (2,5 points)

2) a) Détermine l'équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}f$ au point d'abscisse 0. (1,5 point)
b) Démontre que *f* est concave sur $\mathbb{R}$. (1 point)
c) Déduis-en la position relative de $\mathscr{C}f$ et de (T). (0,5 point)

3) b) Justifie que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur [0 ; 1]. (1,5 point)
c) Utilise la calculatrice pour déterminer un encadrement de α au $100^{\text{ème}}$ près. (1,5 point)
d) Déduis-en le tableau des signes de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$. (1 point)

Exercice 2 : *f* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 3)e^x$. **… / 6**
On note $\mathscr{C}f$ sa représentation graphique dans un repère.

1) a) calcule $f'(x)$. (1,5 point)
b) Etudie le signe de $x^2 + 2x - 3$ sur $\mathbb{R}$. (2 points)
c) Déduis-en le tableau de variations de *f* sur [-4 ; 2]. (1 point)

2) Justifie que $\mathscr{C}f$ admet deux tangentes horizontales. Précise leurs équations. (1,5 point)

Exercice 3 : **… / 3**

Démontre, pour tout réel *x*, l'égalité $\dfrac{2}{1+e^x} = 2 - \dfrac{2}{1+e^{-x}}$

Correction du DS n°4

Exercice 1 :

f et *g* sont les fonctions définies sur ℝ par $f(x)=-3e^x-7x+8$ et $g(x)=\dfrac{e^x-2}{e^x+2}$.

On note $\mathscr{C}f$ la représentation graphique de *f* dans un repère.

1) a) Etudie les variations de *f* sur ℝ.

$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=-3e^x-7.$

$\forall x\in\mathbb{R},\ e^x>0$ Donc : $-3e^x-7<0.$

f ' est strictement négative sur ℝ donc *f* est strictement décroissante sur ℝ.

b) Etudie les variations de *g* sur ℝ.

$\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x)=e^x-2 \\ v(x)=e^x+2 \end{cases}$ et : $\begin{cases} u'(x)=e^x \\ v'(x)=e^x \end{cases}$

$$g'(x)=\frac{e^x(e^x+2)-e^x(e^x-2)}{(e^x+2)^2}=\frac{e^{x+x}+2e^x-e^{x+x}+2e^x}{(e^x+2)^2}=\frac{4e^x}{(e^x+2)^2}$$

$\forall x\in\mathbb{R},\ 4>0,\ e^x>0$ et $(e^x+2)^2>0.$

g ' est strictement positive sur ℝ donc *g* est strictement croissante sur ℝ.

2) a) Détermine l'équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}f$ au point d'abscisse 0.

On a : $f(0)=-3e^0-7\times0+8=-3+8=5$ et : $f'(0)=-3e^0-7=-3-7=-10$

La tangente (T) à $\mathscr{C}f$ au point d'abscisse 0 a pour équation : $y=f'(0)\,(x-0)+f(0)$

$y=-10\,x+5$

b) Démontre que *f* est concave sur ℝ.

$\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)=-3e^x.$

$\forall x\in\mathbb{R},\ e^x>0$ Donc : $-3e^x<0.$

f '' est négative sur ℝ donc *f* est concave sur ℝ.

c) Déduis-en la position relative de $\mathscr{C}f$ et de (T).

Puisque *f* est concave sur ℝ sa courbe représentative $\mathscr{C}f$ est située en dessous de sa tangente (T).

3) b) Justifie que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur [0 ; 1].

f est continue et strictement décroissante sur ℝ.

$f(0)=5>0$ et : $f(1)=-3e^1-7\times1+8=-3e-7+8=-3e+1\approx-7{,}15<0$

Donc *f* change de signe sur [0 ; 1].

On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur [0 ; 1].

c) Utilise la calculatrice pour déterminer un encadrement de α au 100ème près.

On a : $f(0{,}4)\approx0{,}72$ et : $f(0{,}5)\approx-0{,}45$ Donc : $0{,}4<\alpha<0{,}5$

On a : $f(0{,}46)\approx0{,}03$ et : $f(0{,}47)\approx-0{,}09$ Donc : $0{,}46<\alpha<0{,}47$

d) Déduis-en le tableau des signes de $f(x)$ sur ℝ.

Puisque *f* est strictement décroissante sur ℝ et puisque $f(\alpha)=0$ on en déduit :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	

Exercice 2 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^2-3)e^x$.
On note $\mathscr{C}f$ sa représentation graphique dans un repère.

1) a) calcule $f'(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ avec : $\begin{cases} u(x)=x^2-3 \\ v(x)=e^x \end{cases}$ et : $\begin{cases} u'(x)=2x \\ v'(x)=e^x \end{cases}$

$$f'(x)=2xe^x+e^x(x^2-3)=2xe^x+x^2e^x-3e^x=(x^2+2x-3)e^x$$

b) Etudie le signe de x^2+2x-3 sur $\mathbb{R}$.

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times(-3)=4+12=16>0$

On en déduit que le trinôme admet deux racines distinctes :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{2}=\dfrac{-2-4}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3$ et : $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2+4}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

Le trinôme est du signe de $a=1>0$ à l'extérieur des racines. On en déduit :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		+	0	$-$	0	+	

c) Déduis-en le tableau de variations de f sur [-4 ; 2].

$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=(x^2+2x-3)e^x$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ e^x>0$ Donc : $f'(x)$ est du signe de x^2+2x-3 sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	$-$	0	+	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2) Justifie que $\mathscr{C}f$ admet deux tangentes horizontales. Précise leurs équations.

f' s'annule en $x=-3$ et en $x=1$. Donc $\mathscr{C}f$ admet deux tangentes horizontales.

$f(-3)=((-3)^2-3)e^{-3}=(9-3)e^{-3}=6e^{-3}$

La tangente horizontale à $\mathscr{C}f$ au point d'abscisse -3 a donc pour équation : $y=f(-3)$

$y=6e^{-3}$

$f(1)=(1^2-3)e^1=(1-3)e=-2e$

La tangente horizontale à $\mathscr{C}f$ au point d'abscisse 1 a donc pour équation : $y=f(1)$

$y=-2e$

Exercice 3 :

Démontre, pour tout réel x, l'égalité $\dfrac{2}{1+e^x}=2-\dfrac{2}{1+e^{-x}}$

A = B $\Leftrightarrow$ A – B = 0

$$C=\frac{2}{1+e^x}-2+\frac{2}{1+e^{-x}}=\frac{2(1+e^{-x})}{(1+e^x)(1+e^{-x})}-\frac{2(1+e^x)(1+e^{-x})}{(1+e^x)(1+e^{-x})}+\frac{2(1+e^x)}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$$

$$C=\frac{2+2e^{-x}-2(1+e^x)(1+e^{-x})+2+2e^x}{(1+e^x)(1+e^{-x})}=\frac{2+2e^{-x}-2(1+e^{-x}+e^x+e^{x-x})+2+2e^x}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$$

$$C=\frac{2+2e^{-x}-2-2e^{-x}-2e^x-2e^0+2+2e^x}{(1+e^x)(1+e^{-x})}=\frac{0}{(1+e^x)(1+e^{-x})}=0$$

Donc : $\dfrac{2}{1+e^x}=2-\dfrac{2}{1+e^{-x}}$