Nom :.. **DS n°4** **T.S.**
Prénom : .... **le 10/01/2019**

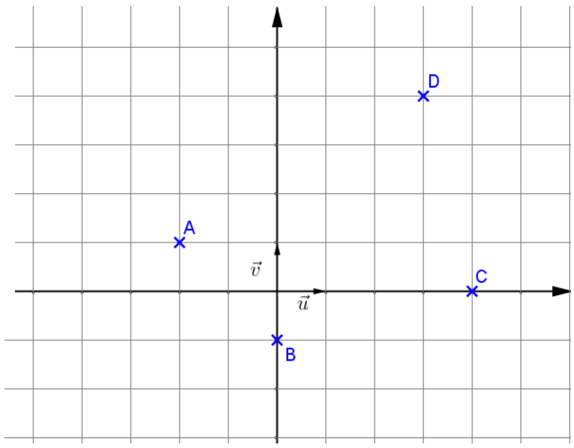
Compétences évaluées :	*Avis du professeur* Acquis	*En cours d'acquisition*	*Non Acquis*
Etudes de fonctions :			
Déterminer trois constantes pour identifier deux expressions d'une même fonction.			
Démontrer qu'une droite est asymptote oblique à une courbe			
Etudier la position relative de deux courbes			
Démontrer qu'une droite est asymptote horizontale à une courbe			
Conjecturer le nombre de points d'intersection d'une courbe avec une asymptote, selon les valeurs d'un paramètre			
Justifier toutes les données d'un tableau de variations			
Justifier qu'une équation admet une unique solution dans un intervalle donné			
Déterminer un encadrement			
Démontrer une conjecture.			
Nombres complexes :			
Déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe			
Calculer l'affixe d'un vecteur/du milieu d'un segment			
Déterminer un ensemble de points			
Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$			
Placer des points d'affixes données dans le plan complexe			
Démontrer la nature d'un triangle / d'un quadrilatère			
Calculer			
Communiquer			
Raisonner			

Exercice 1 : [E.C.] **** Les questions de cet exercice sont indépendantes **** **...... / 7 pts**

1. Calculer la forme algébrique du nombre complexe : $a = \frac{2i}{i-\sqrt{2}}$

2. Soient A, B, C et D les points représenté dans le plan complexe ci-contre. On note I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [AD].

   Démontrer que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.



3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixes z tels que : $|z - 1 - 3i| = 2$

4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixes z tels que : $|z - 3 + i| = |z + 2 - i|$

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-5x+10}{x-2}$
   a) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$
   b) Démontrer que la droite D d'équation $y = x - 3$ est asymptote oblique à C_f.
   c) Etudier la position relative de C_f et de D sur $]-\infty; 2[$ puis sur $]2; +\infty[$.

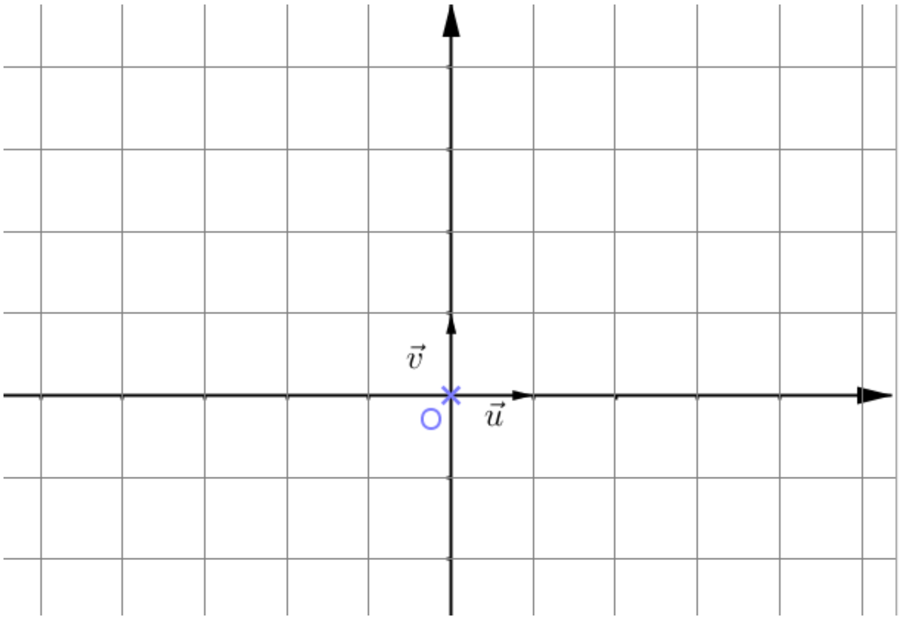
Exercice 2 : …… / 5.5 pts

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(iz+1+i\sqrt{3}\right)(z^2-2z+4)=0$$

Donner les solutions sous forme algébrique.

2. On se place dans le plan complexe muni du repère orthonormé $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\,\right)$.



On considère les nombres complexes $a=1+i\sqrt{3}$ et $b=-\sqrt{3}+i$. On note A et B les points d'affixes respectives a et b.

a) Démontrer que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O.

b) Placer les points A et B.

3. Soient C le point d'affixe : $c=1-\sqrt{3}+i\left(\sqrt{3}+1\right)$

a) Démontrer que OACB est un carré.

b) Placer le point C.

4. Soit z un nombre complexe distinct de b. On pose $Z=\frac{z-a}{z-b}$

Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z du plan complexe tels que Z est un réel.

Exercice 3 : …… / 7,5 pts

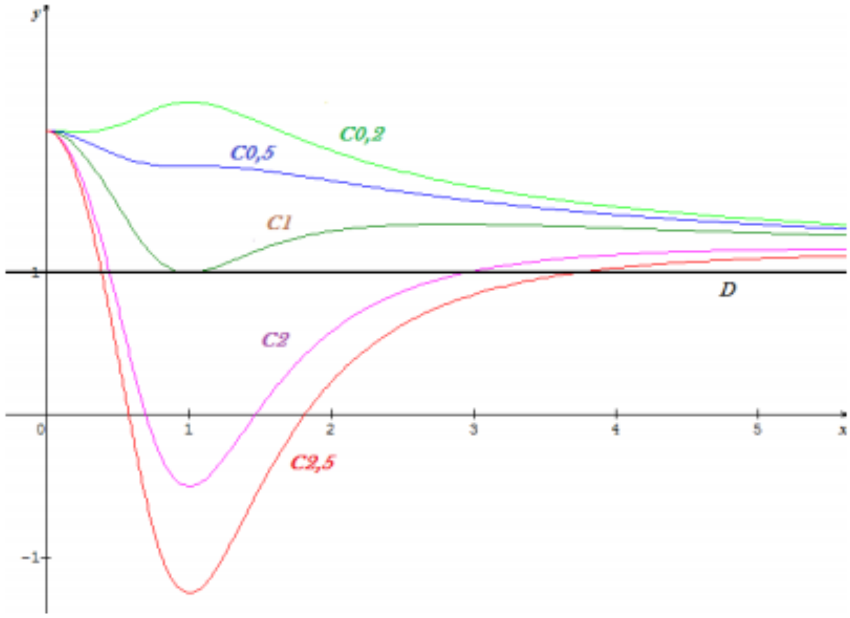
Pour tout réel a strictement positif, on définit sur l'intervalle $[0;+\infty[$ la fonction g par : par :

$$g_a(x)=\frac{x^4+2x^3-3ax^2+2}{x^4+1}$$

On note C_a la courbe représentative de la fonction g dans un repère du plan.

Partie A :

1. Démontrer que la droite D d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à la courbe C_a.
2. On a construit dans le repère ci-dessous les courbes $C_{0,2}$, $C_{0,5}$, C_1 , C_2 et $C_{2,5}$ et la droite D.
   Emettre une conjecture sur le nombre de point(s) d'intersection de C_a avec D selon les valeurs du réel a.



Partie B :

On considère la fonction h_a définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $h_a(x)=2x^3-3ax^2+1$

1. Soit M un point d'abscisse x. Justifier que :
   M appartient à l'intersection de C_a et de D **si et seulement si** son abscisse x vérifie $h_a(x)=0$

2. Justifier toutes les données figurant dans le tableau de variations de la fonction h_a donnée ci-dessous.

x	0		a		$+\infty$
$h_a(x)$	1	↘	$-a^3+1$	↗	$+\infty$

3. Dans cette question, on suppose que $\boldsymbol{a=2}$.
   a) Démontrer que l'équation $h_2(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β avec $\alpha<\beta$.
   Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de chaque valeur.
   b) En déduire le nombre de point(s) d'intersection de C_2 et de D.

4. Déterminer selon les valeurs du réel a, le nombre de point(s) d'intersection de la courbe C_a et de la droite D.
   Justifier votre réponse à l'aide d'un calcul.

Exercice 1 : [E.C.] …… / 7 pts

1. Calculer la forme algébrique du nombre complexe : $a = \frac{2i}{i-\sqrt{2}}$

$a = \frac{2i}{i-\sqrt{2}} = \frac{2i(-i-\sqrt{2})}{(i-\sqrt{2})(-i-\sqrt{2})} = \frac{-2i^2-2i\sqrt{2}}{(-\sqrt{2})^2-i^2} = \frac{2-2i\sqrt{2}}{3} = \frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}i$

2. Soient A, B, C et D les points représenté dans le plan complexe ci-contre. On note I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [AD].
Démontrer que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.

On lit graphiquement : $z_A = -2 + i$; $z_B = -i$; $z_C = 4$ et $z_D = 3 + 4i$
Or :

- I est le milieu du segment [AB] donc $z_I = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{-2+i-i}{2} = -1$
- J est le milieu du segment [BC] donc $z_J = \frac{z_B+z_C}{2} = \frac{-i+4}{2} = 2 - \frac{1}{2}i$
- K est le milieu du segment [CD] donc $z_K = \frac{z_C+z_D}{2} = \frac{4+3+4i}{2} = \frac{7}{2} + 2i$
- L est le milieu du segment [AD] donc $z_L = \frac{z_A+z_D}{2} = \frac{-2+i+3+4i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

On détermine les affixes des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$:

$z_{\overrightarrow{IJ}} = z_J - z_I = 2 - \frac{1}{2}i - (-1) = 3 - \frac{1}{2}i$ et $z_{\overrightarrow{LK}} = z_K - z_L = \frac{7}{2} + 2i - \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i\right) = 3 - \frac{1}{2}i$

Donc $z_{\overrightarrow{LK}} = z_{\overrightarrow{IJ}}$ Ainsi $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{IJ}$

<u>Conclusion</u> : IJKL est un parallélogramme.

3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixes z tels que : $|z - 1 - 3i| = 2$

Soit A le point d'affixe $z_A = 1 + 3i$
$|z - 1 - 3i| = 2 \Leftrightarrow |z_M - z_A| = 2 \Leftrightarrow |z_{\overrightarrow{AM}}| = 2 \Leftrightarrow AM = 2$
L'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixes z est le cercle de centre A et de rayon 2.

4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixes z tels que : $|z - 3 + i| = |z + 2 - i|$

Soit B le point d'affixe $z_B = 3 - i$. Soit C le point d'affixe $z_C = -2 + i$.
$|z - 3 + i| = |z + 2 - i| \Leftrightarrow |z_M - z_B| = |z_M - z_C| \Leftrightarrow |z_{\overrightarrow{BM}}| = |z_{\overrightarrow{CM}}| \Leftrightarrow BM = CM$
L'ensemble des points M d'affixes z tels que : $|z - 3 + i| = |z + 2 - i|$ est donc l'ensemble des points <u>équidistants</u> de B et de C, c'est-à-dire la <u>médiatrice</u> du segment [BC].

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-5x+10}{x-2}$
   a) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}: ax + b + \frac{c}{x-2} = \frac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2} = \frac{ax^2-2ax+bx-2b+c}{x-2} = \frac{ax^2+x(-2a+b)+c-2b}{x-2}$

Par identification $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = -5 \\ c - 2b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 4 \end{cases}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}: f(x) = x - 3 + \frac{4}{x-2}$

   b) Démontrer que la droite D d'équation $y = x - 3$ est asymptote oblique à C_f.

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\} : f(x) - y = x - 3 + \frac{4}{x-2} - (x - 3) = \frac{4}{x-2}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} 4 = 4$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 2 = +\infty$ donc par quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x-2} = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - y = 0$, ainsi la droite D d'équation $y = x - 3$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$.

<u>Remarque</u> :On démontre de même que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - y = 0$. La droite D asymptote oblique à C_f en $-\infty$.

c) Etudier la position relative de C_f et de D sur $]-\infty;2[$ puis sur $]2;+\infty[$.

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\} : f(x) - y = \frac{4}{x-2}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de 4			$+$		
Signe de $x-2$		$-$	0	$+$	
Signe de $f(x)-y$		$-$	$\|$	$+$	

$x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

$\forall x \in]-\infty;2[: f(x) - y < 0$ c'est-à-dire : $\forall x \in]-\infty;2[: f(x) < y$ Donc C_f est en dessous de D sur $]-\infty;2[$.
$\forall x \in]2;+\infty[: f(x) - y > 0$ c'est-à-dire : $\forall x \in]2;+\infty[: f(x) > y$ Donc C_f est au dessus de D sur $]2;+\infty[$

Exercice 2 : …… / 5.5 pts

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(iz + 1 + i\sqrt{3}\right)(z^2 - 2z + 4) = 0$$

Un produit est nul si et seulement si l'un (au moins) de ses facteurs est nul.

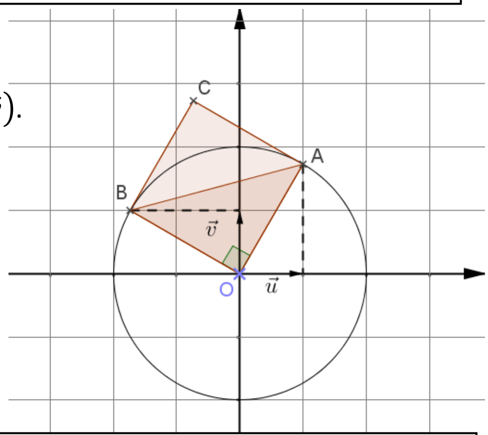
$$\left(iz + 1 + i\sqrt{3}\right)(z^2 - 2z + 4) = 0 \Leftrightarrow iz + 1 + i\sqrt{3} = 0 \; ou \; z^2 - 2z + 4 = 0$$

- $iz + 1 + i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow iz = -1 - i\sqrt{3} \Leftrightarrow z = \frac{-1-i\sqrt{3}}{i} \Leftrightarrow z = \frac{(-1-i\sqrt{3})(-i)}{i\times(-i)} = i + i^2\sqrt{3} = -\sqrt{3} + i$
- $z^2 - 2z + 4 = 0 \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 < 0$

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{2-i\sqrt{12}}{2} = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

__Conclusion__ : L'ensemble des solutions de l'équation $\left(iz + 1 + i\sqrt{3}\right)(z^2 - 2z + 4) = 0$ est :

$$S = \left\{-\sqrt{3} + i \; ; \; 1 - i\sqrt{3} \; ; \; 1 + i\sqrt{3}\right\}$$



2. On se place dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

On considère les nombres complexes $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = -\sqrt{3} + i$.
On note A et B les points d'affixes respectives a et b.

a) Démontrer que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O.

- $OA = |a - 0| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + \sqrt{3}^2} = 2$
- $OB = |b - 0| = |-\sqrt{3} + i| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$
- $AB = |z_B - z_A| = |-\sqrt{3} + i - (1 + i\sqrt{3})| = |-\sqrt{3} - 1 + i(1 - \sqrt{3})| = \sqrt{\left(-\sqrt{3} - 1\right)^2 + (1 - \sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2}$

On remarque que $OA = OB$: On en déduit immédiatement que le triangle OAB est __isocèle__ en O.
D'autre part, on a $AB^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$ et $OA^2 + OB^2 = 2^2 + 2^2 = 8$
Ainsi $AB^2 = OA^2 + OB^2$
Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OAB est __rectangle__ en O.

b) Placer les points A et B.

D'après la question précédente, on a : $|a| = |b| = 2$ c'est à dire : $OA = OB = 2$
Donc A et B sont situés sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 2. [Tracer le cercle]
Or $Re(a) = 1$ donc le point A se situe sur la droite D_1 d'équation $x = 1$. [Tracer le droite]
Donc A est un des deux points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite D_1 .
De plus, $Im(a) = \sqrt{3} > 0$ ce qui nous permet d'en déduire que le point A est situé au dessus de l'axe $(O;\vec{u})$

D'autre part, $Im(b) = 1$ donc le point B se situe sur la droite D_2 d'équation $y = 1$ [Tracer la droite]
Donc B est un des deux points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite D_2 .
De plus, $Re(b) = -\sqrt{3} < 0$ ce qui nous permet d'en déduire que le point B est situé au gauche de l'axe $(O;\vec{v})$.

3. Soient C le point d'affixe : $c = 1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} + 1)$
   a) Démontrer que OACB est un carré.

$z_{\overrightarrow{OA}} = a = 1 + i\sqrt{3}etz_{\overrightarrow{BC}} = c - b = 1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} + 1) - (-\sqrt{3} + i) = 1 + i\sqrt{3}$
Ainsi : $z_{\overrightarrow{OA}} = z_{\overrightarrow{BC}}$ donc $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ et OACB est un parallélogramme.
Or on sait (question 2.a)) que le triangle OAB est isocèle et rectangle en O.
Donc OACB est un parallélogramme ayant un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur.
Ainsi OACB est un carré.

   b) Placer le point C. **[cf repère]**

4. Soit z un nombre complexe distinct de b. On pose $Z = \frac{z-a}{z-b}$
   Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z du plan complexe tels que Z est un réel.

Soit z un nombre complexe tel que $z \neq b$

$Z = \frac{z-a}{z-b}$

$Z = \frac{x+iy-(1+i\sqrt{3})}{x+iy-(-\sqrt{3}+i)}$

$Z = \frac{x-1+i(y-\sqrt{3})}{x+\sqrt{3}+i(y-1)}$

$Z = \frac{\left(x-1+i(y-\sqrt{3})\right)\left(x+\sqrt{3}-i(y-1)\right)}{\left(x+\sqrt{3}+i(y-1)\right)\left(x+\sqrt{3}-i(y-1)\right)}$

$Z = \frac{(x-1)(x+\sqrt{3})+(y-\sqrt{3})(y-1)}{(x+\sqrt{3})^2+(y-1)^2} + i\frac{(y-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})-(x-1)(y-1)}{(x+\sqrt{3})^2+(y-1)^2}$

$Z = \frac{x^2+x\sqrt{3}-x-\sqrt{3}+y^2-y-\sqrt{3}y+\sqrt{3}}{(x+\sqrt{3})^2+(y-1)^2} + i\frac{yx+\sqrt{3}y-\sqrt{3}x-3-xy+x+y-1}{(x+\sqrt{3})^2+(y-1)^2}$

$Z = \frac{x^2+x\sqrt{3}-x+y^2-y-\sqrt{3}y}{(x+\sqrt{3})^2+(y-1)^2} + i\frac{\sqrt{3}y-\sqrt{3}x+x+y-4}{(x+\sqrt{3})^2+(y-1)^2}$

$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}\ et\ z \neq b$

$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow Im(Z) = 0et\ z \neq b$

$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}y-\sqrt{3}x+x+y-4}{(x+\sqrt{3})^2-(i(y-1))^2} = 0\ et\ z \neq b$

$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \sqrt{3}y - \sqrt{3}x + x + y - 4 = 0\ et\ z \neq b$

$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow y(\sqrt{3} + 1) = 4 + x(-1 + \sqrt{3})et\ z \neq b$

$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow y = \frac{4+x(-1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}et\ z \neq b$

<u>**Conclusion**</u> : L'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z du plan complexe tels que Z est un réel est la droite d'équation $y = \frac{4+x(-1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}$ privée du point $B(-\sqrt{3}\,;1)$(pointd'affixe $b = -\sqrt{3} + i$)

<u>**Exercice 3 :**</u> **…… / 7,5 pts**

Pour tout réel a strictement positif, on définit sur l'intervalle $[0; +\infty[$ la fonction g par : par :

$$g_a(x) = \frac{x^4 + 2x^3 - 3ax^2 + 2}{x^4 + 1}$$

On note C_a la courbe représentative de la fonction g dans un repère du plan.

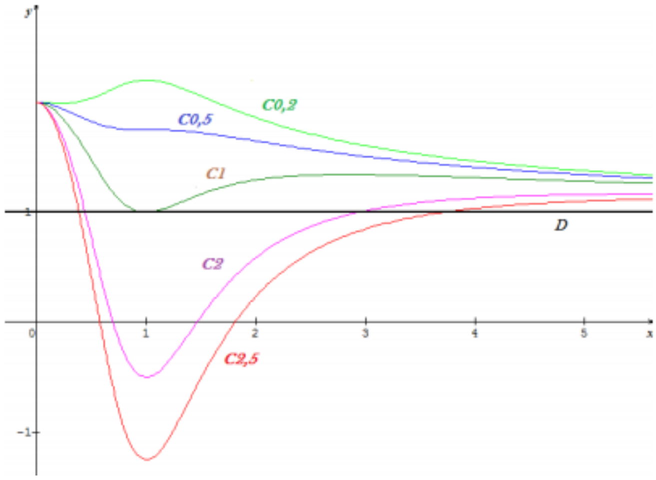
<u>Partie A :</u>

1. Démontrer que la droite D d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe C_a.

La limite en <u>l'infini</u> d'une fonction rationnelle est celle du quotient du terme de plus haut degré de son numérateur par le terme de haut degré de son dénominateur donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4+2x^3-3ax^2+2}{x^4+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^4} = 1$

Donc la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe C_a en $+\infty$

2. On a construit dans le repère ci-dessous les courbes $C_{0,2}$, $C_{0,5}$, C_1 , C_2 et $C_{2,5}$ et la droite D.
Emettre une conjecture sur le nombre de point(s) d'intersection de C_a avec D selon les valeurs du réel a.



On peut conjecturer que :

- Si $a > 1$: La courbe C_a et la droite D ont deux points d'intersection ;
- Si $a = 1$: La courbe C_a et la droite D ont un point d'intersection ;
- Si $a < 1$: La courbe C_a et la droite D n'ont aucun point d'intersection.

Partie B :

On considère la fonction h_a définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $h_a(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1$

1. Soit M un point d'abscisse x. Justifier que :
M appartient à l'intersection de C_a et de D **si et seulement si** son abscisse x vérifie $h_a(x) = 0$

$$M(x;y) \in C_a \cap D \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = g_a(x) \end{cases}$$
$$M(x;y) \in C_a \cap D \Leftrightarrow g_a(x) = 1$$
$$M(x;y) \in C_a \cap D \Leftrightarrow \frac{x^4+2x^3-3ax^2+2}{x^4+1} = 1$$
$$M(x;y) \in C_a \cap D \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 3ax^2 + 2 = x^4 + 1$$
$$M(x;y) \in C_a \cap D \Leftrightarrow 2x^3 - 3ax^2 + 1 = 0$$
$$M(x;y) \in C_a \cap D \Leftrightarrow h_a(x) = 0$$

3. Justifier toutes les données figurant dans le tableau de variations de la fonction h_a donnée ci-dessous.

x	0		a		$+\infty$
$h_a(x)$	1	$\searrow$	$-a^3+1$	$\nearrow$	$+\infty$

- Etude de la limite de h_a en $+\infty$: La limite en l'infini d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h_a(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$

- Fonction dérivée : $\forall\, x \in [0; +\infty[$: $h'_a(x) = 6x^2 - 6xa = 6x(x-a)$
$h'_a(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \;\; ou \;\; x - a = 0 \;\; \Leftrightarrow x = 0 \;\; ou \;\; x = a$

x	0		a		$+\infty$
Signe de $h'_a(x)$	0	$-$	0	$+$	
Variations de h_a	1	$\searrow$	$-a^3+1$	$\nearrow$	$+\infty$

h'_a est une fonction polynôme du second degré avec $a = 6 > 0$

$h_a(0) = 2 \times 0^3 - 3a \times 0^2 + 1 = 1 \quad et \; h_a(a) = 2a^3 - 3a \times a^2 + 1 = -a^3 + 1$

4. Dans cette question, on suppose que $\boldsymbol{a} = \mathbf{2}$.

a) Démontrer que l'équation $h_2(x) = 0$ admet exactement deux solutions α *et* β avec $\alpha < \beta$.
Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de chaque valeur.

<u>Cas particulier $a = 2$:</u>

x	0		2		$+\infty$
Signe de $h_2'(x)$	0	$-$	0	$+$	
Variations de h_2	1	$\searrow$	-7	$\nearrow$	$+\infty$

- La fonction h_2 est continue sur $[0; 2]$ (*car c'est une fonction polynôme définie, continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$) et strictement décroissante sur $[0; 2]$; $f(2) < 0 < f(0)$, donc d'après le corollaire du TVI l'équation $h_2(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 2]$.
- La fonction h_2 est continue sur $[2; +\infty[$ et strictement croissante sur $[2; +\infty[$; $f(2) = -7$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} h_2(x) = +\infty$; $0 \in]-7; +\infty[$, donc d'après le corollaire du TVI l'équation $h_2(x) = 0$ admet une unique solution β dans $[2; +\infty[$.

<u>Conclusion</u> : l'équation $h_2(x) = 0$ admet deux solutions dans $[0; +\infty[$.

Utilisons la méthode de <u>balayage</u> pour donner un encadrement d'amplitude 0,01 de chaque valeur :

- Encadrement de α :
  - Par pas de 1 : $h_2(0) = 1 > 0$ *et* $h_2(1) = -3 < 0$ donc $0 < \alpha < 1$
  - Par pas de 0,1 : $h_2(0{,}4) \approx 0.17 > 0$ *et* $h_2(0{,}5) = -0{,}25 < 0$ donc $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$
  - Par pas de 0,01 : $h_2(0{,}44) \approx 0{,}009 > 0$ *et* $h_2(0{,}45) \approx -0.03 < 0$ donc $0{,}44 < \alpha < 0{,}45$
- Encadrement de β: $h_2(2{,}94) \approx -0.04 < 0$ *et* $h_2(2{,}95) \approx 1.13 > 0$ *donc* $2{,}94 < \beta < 2{,}95$

b) En déduire le nombre de point(s) d'intersection de C_2 et de D.

D'après la question 1. : $M(x; y) \in C_a \cap D \Leftrightarrow h_a(x) = 0$
Or d'après la question précédente, l'équation $h_2(x) = 0$ admet deux solutions α *et* β dans $[0; +\infty[$.
Donc on en déduit que la courbe C_2 et la droite D ont deux points d'intersection. Les abscisses de ces points d'intersection sont α *et* β

5. Déterminer selon les valeurs du réel a, le nombre de point(s) d'intersection de la courbe C_a et de la droite D *Justifier votre réponse à l'aide d'un calcul.*

<u>Rappel</u> :

- D'après la question 1. : $M(x; y) \in C_a \cap D \Leftrightarrow h_a(x) = 0$
- D'après la question 2. On a le tableau de variations suivant :

x	0		a		$+\infty$
$h_a(x)$	1	$\searrow$	$-a^3 + 1$	$\nearrow$	$+\infty$

<u>Cas 1 : si $a > 1$</u> alors $a^3 > 1$ (la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$) donc $-a^3 + 1 < 0$
Ainsi l'équation $h_a(x) = 0$ admet deux solutions dans $[0; +\infty[$. [Ex : Cas $a = 2$ étudié précédemment]
Donc la courbe C_a et la droite D ont deux points d'intersection.

<u>Cas 2 : si $a = 1$</u> alors $-a^3 + 1 = 0$
Ainsi le minimum de la fonction h_a sur $[0; +\infty[$ vaut 0 (atteint en a)
Donc l'équation $h_a(x) = 0$ admet une unique solution (a) dans $[0; +\infty[$
Donc la courbe C_a et la droite D ont un unique point d'intersection en $x = a$.

<u>Cas 3 : si $a < 1$</u> alors $a^3 < 1$ *donc* $-a^3 + 1 > 0$
Ainsi le minimum de la fonction h_a sur $[0; +\infty[$ est strictement positif.
L'équation $h_a(x) = 0$ n'admet donc aucune solution sur $[0; +\infty[$.
Donc la courbe C_a et la droite D n'ont aucun point commun.

La conjecture émise en question 2 est validée.