TS **Devoir surveillé n°04** **mardi 14 décembre 2016**

Nom : **Prénom :**

Compétences	*Acquis*	*En cours d'acquisition*	*Non acquis*
Déterminer l'ensemble de définition-ensemble de dérivabilité d'une fonction.			
Déterminer les limites d'une fonction et les asymptotes éventuelles			
Calcul de dérivées			
Etude du signe d'une expression			
Lecture graphique			
Définir l'intersection de 2 courbes			
Application du théorème des valeurs intermédiaires			
Encadrer la solution d'une équation			
Maitrise des calculs			
Justifier - argumenter			

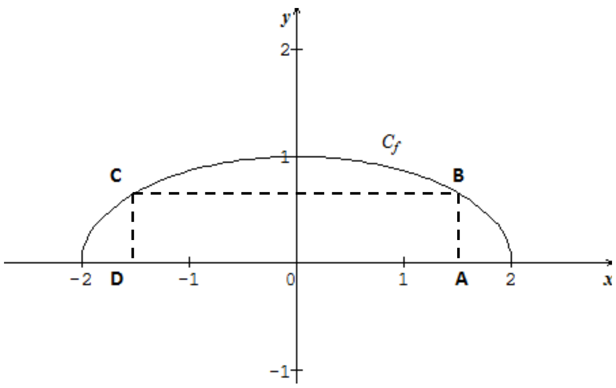
Barème	Exercice n°1 : 4 points	Exercice n°2 : 6 points	Exercice n°3 : 10 points	Total : 20 points
note				

Exercice n°1 :

1. Soit f la fonction définie sur [3 ;+∞[par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+1}}$ .Déterminer la limite de la fonction f en +∞.
   Donner une interprétation graphique du résultat.
2. Soit g la fonction définie sur]-∞ ;2[∪]2 ;+∞[par $g(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-2}$ .Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les asymptotes éventuelles de la courbe représentative de la fonction g.

Exercice n°2 :

1. Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{1-0{,}25x^2}$.
   a) Justifier que la fonction f est définie sur [-2 ;2].
   b) Etudier la dérivabilité de la fonction f.
   c) Prouver que pour tout réel x ∈[-2 ;2] $f(x) = f(-x)$
2. Soit C_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé ci-dessous.



Pour tout réel x de l'intervalle]0 ;2[, on note :

A le point de coordonnées $(x\,;0)$

D le point de coordonnées $(-x\,;0)$

B le point de coordonnées $(x\,;f(x))$

C le point de coordonnées $(-x\,;f(-x))$

On se propose de déterminer pour quelle valeur de x l'aire du rectangle ABCD est maximale.

Soit g la fonction qui à tout réel x de l'intervalle] 0 ;2[associe l'aire du rectangle ABCD.

a) Justifier que $g(x)=2x\sqrt{1-0{,}25x^2}$
b) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle]0 ;2[$g'(x)=\frac{2-x^2}{\sqrt{1-0.25x^2}}$
c) Construire le tableau de variation de la fonction g sur]0 ;2[.En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle est maximale .Calculer la valeur de cette aire maximale.

Exercice n°3 :

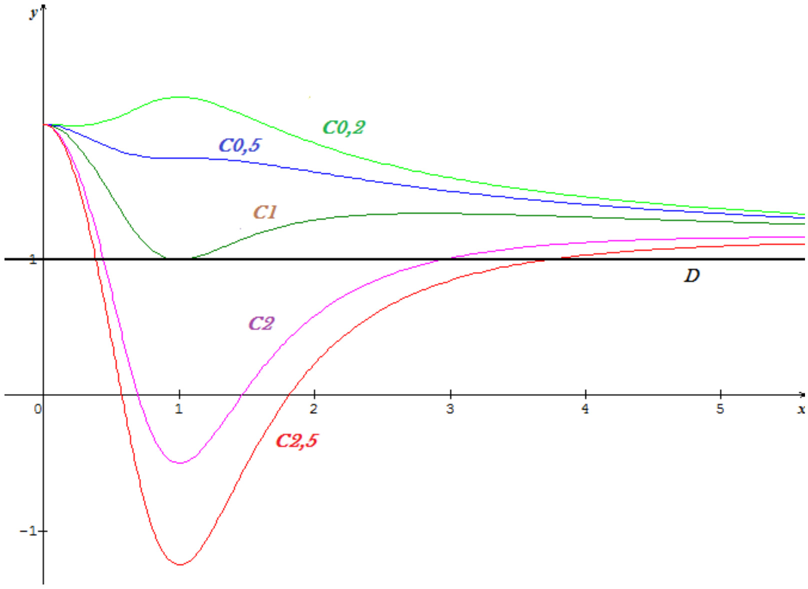
Pour tout réel a strictement positif, on définit sur l'intervalle [0 ; +∞ [la fonction g_a par :

$$g_a(x)=\frac{x^4+2x^3-3ax^2+2}{x^4+1}$$

On note C_a la courbe représentative de la fonction g_a dans un repère du plan.

Partie A

1. Démontrer que la droite D d'équation y=1 est une asymptote à la courbe C_a
2. On a construit dans le repère ci-dessous les courbes $C_{0,2}$, $C_{0,5}$, C_1,C_2, $C_{2.5}$ et la droite D



Emettre une conjecture sur le nombre de point(s) d'intersection de C_a et D selon les valeurs du réel a.

Partie B

On considère la fonction h_a définie sur l'intervalle [0 ;+∞[par $h_a(x)$=2x^3 −3ax^2+1

1. Soit M un point d'abscisse x .Justifier que :
   M appartient à l'intersection de C_a et de D **si et seulement si** son abscisse x vérifie $h_a(x) = 0$.
2. Justifier toutes les données figurant dans le tableau de variation de la fonction h_a donné ci-dessous.

x	0		a		+∞
$h_a(x)$	1	↘	-a^3 + 1	↗	+∞

3. Dans cette question, on suppose a=2.
   a. Démontrer que l'équation $h_2(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β avec $\alpha < \beta$. Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de chaque valeur.
   b. En déduire le nombre de point(s) d'intersection de C_2 et de D.
4. Déterminer selon les valeurs du réel a, le nombre de point(s) d'intersection de la courbe C_a et de la droite D. Justifier votre réponse à l'aide d'un calcul.

Exercice n°1 :

1. Soit f la fonction définie sur [3 ;+∞[par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+1}}$

Une fonction polynôme se comporte en l'infini comme son terme de plus haut degré (propriété (P)) donc

$\lim_{x\to+\infty} x^2-3x+1=\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+1}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+1}}=0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ donc la droite d'équation y=0 est une asymptote horizontale à C_f en +∞ .

2. Soit g la fonction définie sur]-∞ ;2[U]2 ;+∞[par $g(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-2}$.

Une fonction rationnelle se comporte en l'infini comme le quotient de ses termes de plus haut degré (propriété (R))

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+1}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+1}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to2} g(x)$: $\lim\limits_{x\to2} x^2-3x+1=-1$

$\lim\limits_{x\to2} x-2=0$

donc $\lim\limits_{x\to2} g(x)$ = « $\frac{-1}{0}$ » est infinie.

x	-∞ 2 + ∞
Signe de $x-2$	− 0 +

On en déduit : $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} x-2=0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} x-2=0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} g(x)=-\infty$

Donc la droite d'équation x = 2 est une asymptote verticale à C_g .

Exercice n°2 :

1. Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{1-0{,}25x^2}$.

a) f est définie si et seulement si $1-0{,}25x^2\geq 0$, $1-0{,}25x^2=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{0{,}25}=4 \Leftrightarrow x=2 \text{ ou } x=-2$

x	-∞	-2	2	+∞
Signe de $1-0{,}25x^2$	−	0 +	0	−

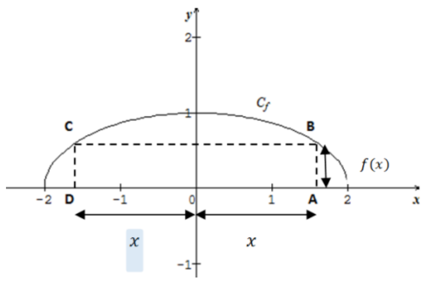
La fonction x→$1-0{,}25x^2$ est une fonction polynôme de degré 2, elle est du signe de a=-0,25<0 sauf entre les racines

Donc f est définie sur [-2 ;2]

b) La fonction x→$1-0{,}25x^2$ est une fonction polynôme dérivable sur ℝ.
La fonction racine carrée est dérivable sur]0 ;+∞[donc la fonction f est dérivable sur]-2 ;2[.

c) $f(x)=\sqrt{1-0{,}25x^2}$, pour tout réel $x\in$[-2 ;2], $-x\in$[-2 ;2] et $f(-x)=\sqrt{1-0{,}25(-x)^2}=\sqrt{1-0{,}25x^2}=f(x)$

2.



a) L'aire du rectangle ABCD est égale à ADxAB.
Or $x\in$[0 ;2] donc x>0 donc AD =x_D-x_A = $2x$
$f(x)=\sqrt{1-0{,}25x^2}$ >0 donc AB=x_B-x_A= $f(x)$
$g(x)=2x\sqrt{1-0{,}25x^2}$

b) g = u×v donc g' = u'×v+ u×v' avec u(x)=2x et v(x) =$\sqrt{1-0{,}25x^2}$
Donc u'(x) =2 et v'(x) =$\frac{-0{,}5x}{2\sqrt{1-0{,}25x^2}}=\frac{-0{,}25x}{\sqrt{1-0{,}25x^2}}$

Donc $g'(x)=2\times\sqrt{1-0{,}25x^2}+2x\,\frac{-0{,}25x}{\sqrt{1-0{,}25x^2}}$; $g'(x)=\frac{2(\sqrt{1-0{,}25x^2})^2-0{,}5x^2}{\sqrt{1-0{,}25x^2}}=\frac{2(1-0{,}25x^2)-0{,}5x^2}{\sqrt{1-0{,}25x^2}}=\frac{2-x^2}{\sqrt{1-0.25x^2}}$

c) $\sqrt{1-0{,}25x^2}>0$ donc $g'(x)$ est du signe de $2-x^2$.
$2-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}\notin$]0 ;2[

La fonction x→$2-x^2$ est une fonction polynôme de degré 2, elle est du signe de a=-1<0 sauf entre les racines

x	0	$\sqrt{2}$	2
Signe de $g'(x)$	‖ +	0	− ‖
Variation de g	0 ↗	2	↘ 0

$g(\sqrt{2})=2\sqrt{2}\sqrt{1-0{,}25\sqrt{2}^2}=2\sqrt{2}\sqrt{1-0{,}5}=2\sqrt{2}\sqrt{0{,}5}=2\sqrt{1}=2$

D'après le tableau des variations l'aire est maximale pour $x=\sqrt{2}$ et l'aire maximale est égale à 2 unités d'aire.

Exercice n°3 : **Partie A** : $\forall x \in [0\ ;+\infty[$ $\quad g_a(x)=\frac{x^4+2x^3-3ax^2+2}{x^4+1}$.

1. D'après la propriété (R), $\lim\limits_{x\to+\infty} g_a(x)= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^4}$ =1 donc la droite d'équation y=1 est asymptote à C_a en +∞.
2. Par lecture graphique, la droite D ne coupe pas les courbes $C_{0,2}$, $C_{0,5}$.

   la droite D coupe les courbes C_2, $C_{2.5}$ en deux points .

   la droite D coupe la courbe C_1 en un point.

   On peut conjecturer ; Si $a < 1$ la droite D ne coupe pas les courbes C_a

   Si $a > 1$ la droite D coupe les courbes C_a, en deux points.

   Si a=1 la droite D coupe la courbe C_1 en un point.

Partie B : La fonction h_a est définie sur l'intervalle [0 ;+∞[par $h_a(x)$=2x^3-3ax^2+1

1. M(x ; y)∈ $C_a \cap D \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{x^4+2x^3-3ax^2+2}{x^4+1} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^4+2x^3-3ax^2+2}{x^4+1}=1 \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 3ax^2 + 2=1\text{x}(x^4 + 1)$

   $\Leftrightarrow 2x^3\text{-}3ax^2\text{+}1 = 0$

   Donc M(x ; y)∈ $C_a \cap D \Leftrightarrow h_a(x) = 0$

2. La fonction h_a est une fonction polynôme dérivable sur ℝ. $\quad h'_a(x)$ = 6x^2-6ax

   6x^2-6ax=0 $\Leftrightarrow 6x(x-a) = 0 \Leftrightarrow x$=0 ou x=a

x	0		a		+∞
Signe de h'_a(x)		−	0	+	
Variations de h_a	1	↘	-a^3+1	↗	+∞

La fonction x→$6x^2 - 6ax$ est une fonction polynôme de degré 2, elle est du signe du coefficient de x², de 6> 0 sauf entre les racines.

D'après (P) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3\text{-}3ax^2\text{+}1= \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3$ =+∞

$h_a(a)$ =2a^3-3aa^2+1=2a^3-3a^3+1=-a^3+1

$h_a(0)$=2x0^3-3a0²+1=1

3. a)

   a=2 donc le tableau devient :

   $h_2(x)$=2x^3-6x^2+1

x	0		α		2		β		+∞
$h_2(x)$	1	↘	0	↘	-7	↗	0	↗	+∞

Sur [0 ; 2] ▪0∈[-7 ;1]=h_2([0 ;2])(ou ∀x∈[0 ;2] $h_2(x)$ ∈[-7 ;1] et 0∈[-7 ;1])

▪h_2 est continue

▪h_2 est strictement décroissante

D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $h_2(x)$=0 admet une solution unique α∈[0 ;2]

Sur] 2 ;+∞[▪0∈]-7 ;+∞[=h_2(]2 ;+∞[ ) (ou ∀x∈]2 ;+∞[$h_2(x)$ ∈]-7 ;+∞[et 0∈]-7 ;+∞[)

▪h_2 est continue

▪h_2 est strictement croissante

D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $h_2(x)$=0 admet une solution unique β∈] 2 ;+∞[

En utilisant la méthode par balayage :

h_2(0,44)≈0,008>0 ; h_2(0,45)≈-0,033<0 donc α∈[0,44 ;0,45]

h_2(2,94)≈-0,037<0 ; h_2(2,95)≈0,130>0 donc β∈[2,94 ;2,95]

b) D'après la propriété établie dans la question 1 : M(x ; y)∈ $C_a \cap D \Leftrightarrow h_a(x) = 0$

$h_2(x) = 0 \Leftrightarrow x$= α ou x=β on peut déduire que C_2 et Dont deux points d'intersection, le point d'abscisse α et le point d'abscisse β.

4. Démontrons les conjectures établies dans la **partie A.**

   Si $\underline{a > 1}$ la fonction cube est croissante donc a^3>1 ⇔0>- a^3+1 .

   on démontre comme dans le 3. que l'équation $h_a(x)$=0 admet deux solutions distinctes.

   D'après la propriété établie au 1.de la partie B

   la droite D coupe les courbes C_a, en deux points.

   Si $\underline{a < 1}$ la fonction cube est croissante donc a^3<1 ⇔0<- a^3+1 .

   D'après le tableau des variations - a^3+1 est le minimum et 0<- a^3+1,

   l'équation $h_a(x)$=0 n'admet pas de solution. D'après la propriété établie au 1.de la partie B

   la droite D ne coupe pas les courbes C_a .

   Si $\underline{a = 1}$ - a^3+1=0

   D'après le tableau des variations - a^3+1=0 est le minimum.

   l'équation $h_a(x)$=0 admet une solution unique x= 0. D'après la propriété établie au 1.de la partie B

   la droite D coupe la courbe C_1 en un seul point .