Nom :	**DS n°4**	*Classe* :
Prénom :	le 13/03/2018	BTS 1

Les exercices seront traités dans l'ordre de votre choix. La présentation et le soin apportés à la présentation de votre copie rentreront pour une part importante dans sa notation.

Exercice 1 : QCM **… / 5**

Pour chacune des questions de ce questionnaire à choix multiples, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse erronée, multiple ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

L'iode 131 est un produit radioactif. La masse de tout échantillon d'iode 131 diminue régulièrement de $8,3$ % par jour par désintégration. On dispose d'un échantillon de masse initiale $M_0 = 100$ g. On note M_n la masse de cet échantillon au bout de n jours.

1. Arrondie au dixième, la masse M_2 de l'échantillon au bout de 2 jours est :

   a) $68,9$ g b) $83,4$ g c) $84,1$ g d) $98,3$ g

2. La suite des nombres M_n est une suite :

   a) arithmétique de raison $0,917$ b) géométrique de raison $0,917$

   c) arithmétique de raison $0,083$ d) géométrique de raison $0,083$

3. L'expression de M_n en fonction de n est :

   a) $M_n = 100 + 0,917n$ b) $M_n = 100 \times 0,083^n$

   c) $M_n = 100 + 0,917^n$ d) $M_n = 100 \times 0,917^n$

4. On veut calculer les masses successives de l'échantillon à l'aide d'un tableur :

	A	B
1	Jour n	M_n
2	0	100
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	

   La formule à écrire en B3 pour obtenir, en la recopiant vers le bas, les termes M_n de la suite est :

   a) =B2*$0,917$ b) =100*$0,917$^A2 c) =100*$0,917$^B2 d) =A2*$0,917$

5. La masse de l'échantillon est inférieure à 10 g au bout de :
   a) 11 jours b) 23 jours c) 26 jours d) 27 jours

Exercice 2 : Norme européenne et algorithmique **… / 7**

Depuis 2000, l'Union Européenne cherche à diminuer les émissions de polluants (hydrocarbures et oxydes d'azote) sur les moteurs diesel des véhicules roulants. En 2000, la norme tolérée était fixée à 635 mg.km^{-1} en conduite normalisée. La norme est réactualisée chaque année à la baisse et depuis 2000, sa baisse est de $11,7$ % par an. L'objectif de l'Union Européenne est d'atteindre une émission de polluants inférieure à 100 mg.km^{-1}.

1. a) Justifier que la norme tolérée était d'environ 561 mg.km^{-1} en 2001.

   b) Un véhicule émettait 500 mg.km^{-1} en 2002. Indiquer, en justifiant, s'il respectait ou non la norme cette année là.

2. Dans le cadre d'une recherche, un technicien supérieur se propose de déterminer à partir de quelle année l'Union Européenne atteindra son objectif. Il a amorcé l'algorithme suivant :

   ```
   N ← 0
   P ← 635
   Tant que …
       N ← N + 1
       P ← 0,883 × P
   Fin Tant que
   Afficher …
   ```

   a) Expliquer l'instruction « $P \leftarrow 0,883 \times P$ »

   b) Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme qui comportent des pointillés afin d'aider le technicien à déterminer l'année recherchée.

3. Pour tout entier naturel n, on note $u_n$la norme tolérée, exprimée en mg.km^{-1} l'année $2000 + n$.
   On a ainsi $u_0 = 635$.

   a) Etablir que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

   b) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

4. Déterminer à partir de quelle année, l'Union Européenne atteindra son objectif.

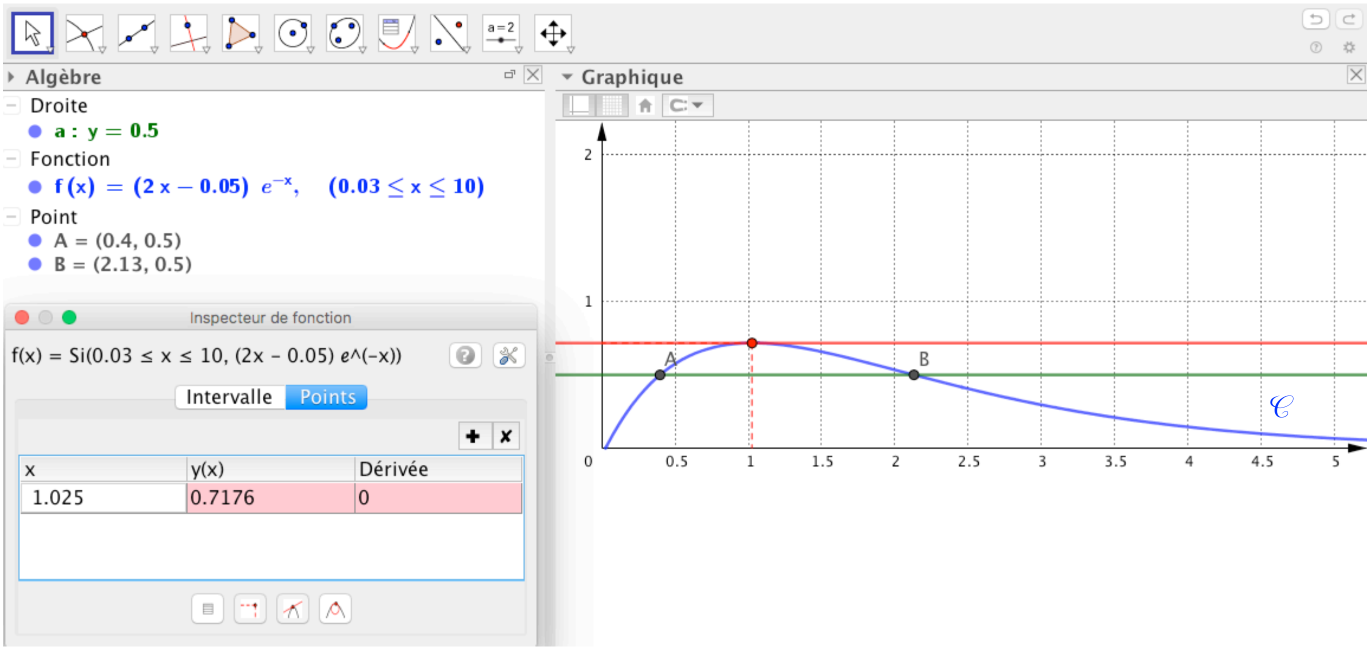
Exercice 3 : Taux d'alcool dans le sang **… / 8**

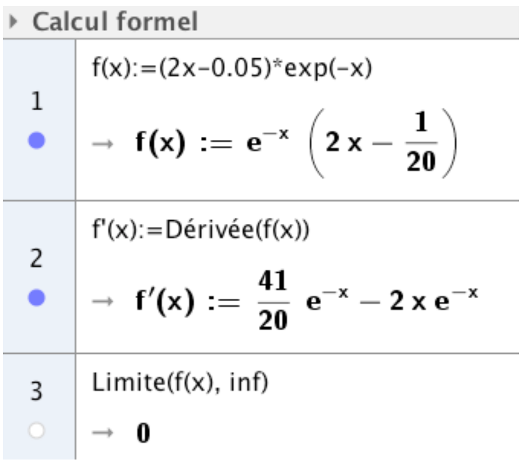
Une personne a ingéré une certaine quantité d'alcool. On s'intéresse à l'évolution du taux d'alcool dans le sang de cette personne, en fonction du temps écoulé t, en heures.

Compte tenu du délai d'absorption par l'organisme, le taux d'alcool dans le sang de cette personne est donné, en grammes par litre, par la fonction f définie sur $[0,025\ ;+\infty[$ par :

$$f(t)=(2t-0,05)e^{-t}$$

Une représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthogonal, ainsi que d'autres résultats sont fournis ci-après par le logiciel Geogebra.





1. Déterminer, à l'aide de ces affichages :

   a) L'intervalle de temps pendant lequel le taux d'alcool de cette personne reste supérieur à $0,5$ g.L^{-1}.

   b) A quel instant le taux d'alcool est maximum ? Donner ce maximum.

   c) Quelle est la valeur de $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$? En déduire que la courbe admet une asymptote dont on donnera l'équation.

2. a) Justifier, à partir des résultats fournis par geogebra, que pour tout réel t de $[0,025\ ;+\infty[$ on a :

   $$f'(t)=\frac{41-40t}{20\,e^{t}}$$

   b) En déduire le signe de $f'(t)$ sur $[0,025\ ;+\infty[$.

   c) Dresser le tableau de variations de f sur $[0,025\ ;+\infty[$.

Correction du DS n°4

Exercice 1 : QCM (Les bonnes réponses sont encadrées en rouge)

L'iode 131 est un produit radioactif. La masse de tout échantillon d'iode 131 diminue régulièrement de $8,3$ % par jour par désintégration. On dispose d'un échantillon de masse initiale $M_0 = 100$ g. On note M_n la masse de cet échantillon au bout de n jours.

1. Arrondie au dixième, la masse M_2 de l'échantillon au bout de 2 jours est :

   a) $68,9$ g $\boxed{\text{b) } 83,4 \text{ g}}$ c) $84,1$ g d) $98,3$ g

> $M_0 = 100$
> $M_1 = (1 - \frac{8,3}{100}) \times 100 = (1 - 0,083) \times 100 = 0,917 \times 100 = 91,7$
> $M_2 = (1 - 0,083) \times 91,7 \approx 84,1$ (réponse b)

2. La suite des nombres M_n est une suite :

   a) arithmétique de raison $0,917$ $\boxed{\text{b) géométrique de raison } 0,917}$
   c) arithmétique de raison $0,083$ d) géométrique de raison $0,083$

> $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = (1 - 0,083) \times M_n$
> $M_{n+1} = 0,917 M_n$
> On en déduit que la suite des nombres M_n est géométrique de raison $0,917$ (réponse b).

3. L'expression de M_n en fonction de n est :

   a) $M_n = 100 + 0,917n$ b) $M_n = 100 \times 0,083^n$
   c) $M_n = 100 + 0,917^n$ $\boxed{\text{d) } M_n = 100 \times 0,917^n}$

> Puisque M_n est géométrique de raison $0,917$ et de premier terme $M_0 = 100$ alors :
> $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $M_n = M_0 \times q^n = 100 \times 0,917^n$ (réponse d)

4. On veut calculer les masses successives de l'échantillon à l'aide d'un tableur :

	A	B
1	Jour n	M_n
2	0	100
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	

   La formule à écrire en B3 pour obtenir, en la recopiant vers le bas, les termes M_n de la suite est :

   $\boxed{\text{a) =B2*0,917}}$ b) =100*0,917^A2 c) =100*0,917^B2 d) =A2*0,917

> La première formule permet de calculer chaque terme M_n, à partir du précédent dans la même colonne B.

5. La masse de l'échantillon est inférieure à 10 g au bout de :

   a) 11 jours b) 23 jours c) 26 jours $\boxed{\text{d) 27 jours}}$

> $M_n < 10 \Leftrightarrow 100 \times 0,917^n < 10 \Leftrightarrow 0,917^n < \frac{10}{100} \Leftrightarrow 0,917^n < 0,1 \Leftrightarrow ln\,(0,917^n) < ln\,0,1$
> $M_n < 10 \Leftrightarrow n\,ln\,0,917 < ln\,0,1$
> $0 < 0,917 < 1$ donc $ln\,0,917 < 0$
> On en déduit : $n > \frac{ln\,0,1}{ln\,0,917} \approx 26,6$
> Or $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 27$ (réponse d)

Exercice 2 : Depuis 2000, l'Union Européenne cherche à diminuer les émissions de polluants (hydrocarbures et oxydes d'azote) sur les moteurs diesel des véhicules roulants. En 2000, la norme tolérée était fixée à 635 mg.km^{-1} en conduite normalisée. La norme est réactualisée chaque année à la baisse et depuis 2000, sa baisse est de $11,7$ % par an. L'objectif de l'Union Européenne est d'atteindre une émission de polluants inférieure à 100 mg.km^{-1}.

1. a) Justifier que la norme tolérée était d'environ 561 mg.km^{-1} en 2001.

De 2000 à 2001, la norme a diminué de $11,7$ %. En l'an 2000 elle était fixée à 635 mg.km^{-1}.
$(1-0,117)\times 635 = 0,883\times 635 \approx 561$
La norme tolérée en 2001 est donc d'environ 561 mg.km^{-1}.

b) Un véhicule émettait 500 mg.km^{-1} en 2002. Indiquer, en justifiant, s'il respectait ou non la norme cette année là.

De 2001 à 2002, la norme a encore diminué de $11,7$ %.
$(1-0,117)\times 561 = 0,883\times 561 \approx 495$
La norme tolérée en 2002 est donc d'environ 495 mg.km^{-1}.
$500 > 495$
Ainsi, un véhicule qui émettait 500 mg.km^{-1} de polluants en 2002 ne respectait pas la norme.

2. Dans le cadre d'une recherche, un technicien supérieur se propose de déterminer à partir de quelle année l'Union Européenne atteindra son objectif. Il a amorcé l'algorithme suivant :

```
N ← 0
P ← 635
Tant que …
    N ← N + 1
    P ← 0,883 × P
Fin Tant que
Afficher …
```

a) Expliquer l'instruction « $P \leftarrow 0,883\times P$ »

« $P \leftarrow 0,883\times P$ » signifie qu'on affecte le résultat de $0,883\times P$ dans la variable P.

b) Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme qui comportent des pointillés afin d'aider le technicien à déterminer l'année recherchée.

L'objectif est de déterminer l'année à partir de laquelle la norme d'émission de polluants sera inférieure à 100 mg.km^{-1}. On en déduit qu'il faut compléter les lignes comme indiqué ci-dessous :
- Tant que $P \geq 100$
- Afficher N

3. Pour tout entier naturel n, on note u_n la norme tolérée, exprimée en mg.km^{-1} l'année $2000+n$. On a ainsi $u_0 = 635$.

a) Etablir que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

D'une année à l'autre, la norme diminue de $11,7$ %.
Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (1-0,117)\times u_n$
$u_{n+1} = 0,883\, u_n$
On en déduit que la suite des nombres u_n est géométrique de raison $0,883$.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

u_n est géométrique de raison $0,883$ et de premier terme $u_0 = 635$.
Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 635\times 0,883^n$

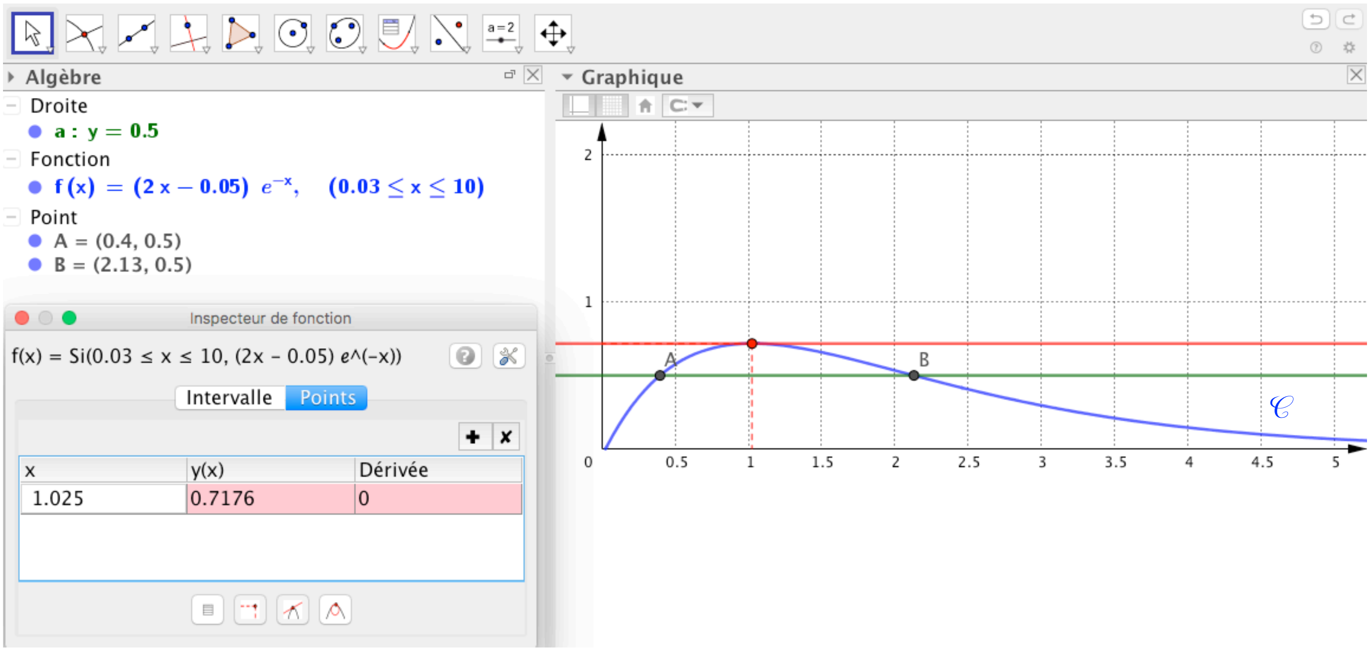
4. Déterminer à partir de quelle année, l'Union Européenne atteindra son objectif.

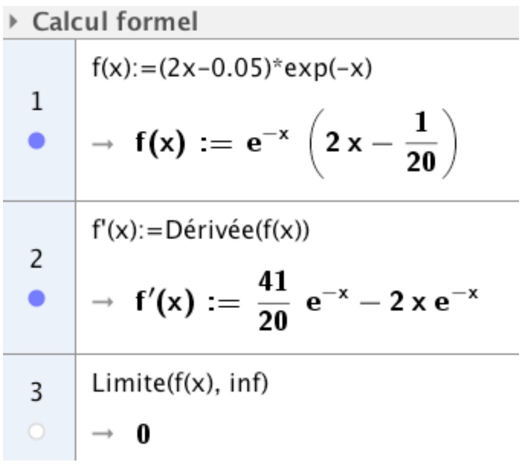
En résolvant $u_n < 100 \;\Leftrightarrow\; 635\times 0,883^n < 100$ (cf. méthode exposée dans la question 5 de l'exercice 1) ou en utilisant le tableur de la calculatrice on obtient : $n \geq 15$
On en déduit que l'Union Européenne a atteint son objectif, qui était d'atteindre une émission de polluants inférieure à 100 mg.km^{-1}, en 2015.

Exercice 3 : Une personne a ingéré une certaine quantité d'alcool. On s'intéresse à l'évolution du taux d'alcool dans le sang de cette personne, en fonction du temps écoulé t, en heures.
Compte tenu du délai d'absorption par l'organisme, le taux d'alcool dans le sang de cette personne est donné, en grammes par litre, par la fonction f définie sur $[0,025\ ;+\infty[$ par :

$$f(t) = (2t - 0,05)e^{-t}$$

Une représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthogonal, ainsi que d'autres résultats sont fournis ci-après par le logiciel Geogebra.





1. Déterminer, à l'aide de ces affichages :
   a) L'intervalle de temps pendant lequel le taux d'alcool de cette personne reste supérieur à $0,5$ g.L^{-1}.

On se sert des coordonnées de $A(0,4\ ;0,5)$ et $B(2,13\ ;0,5)$.
Le taux d'alcool de cette personne reste supérieur à $0,5$ g.L^{-1} sur l'intervalle de temps $[0,4\ ;2,13]$.

   b) A quel instant le taux d'alcool est maximum ? Donner ce maximum.

On se sert de l'affichage de l'inspecteur de fonction.
On lit : $f'(1,025) = 0$ et $f(1,025) \approx 0,7176$
On en déduit que le taux d'alcool est maximum en $1,025$ h et que ce taux maximum est d'environ $0,7176$ g.L^{-1}.

   c) Quelle est la valeur de $\lim_{t\to+\infty} f(t)$? En déduire que la courbe admet une asymptote dont on donnera l'équation.

On lit la réponse dans la fenêtre de calcul formel :
$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$
On en déduit que $\mathscr{C}$ admet pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 0$.

2. a) Justifier, à partir des résultats fournis par geogebra, que pour tout réel t de $[0,025\ ;+\infty[$ on a :

$$f'(t) = \frac{41-40t}{20\,e^{t}}$$

On lit : $\forall\ t \in [0,025\ ;+\infty[,\ f'(t) = \frac{41}{20}e^{-t} - 2t\,e^{-t}$
On en déduit : $f'(t) = \left(\frac{41}{20} - 2t\right)e^{-t} = \left(\frac{41-40t}{20}\right)\frac{1}{e^{t}} = \frac{41-40t}{20\,e^{t}}$

b) En déduire le signe de $f'(t)$ sur $[0,025\ ;+\infty[$.

$\forall\ t \in [0,025\ ;+\infty[$, $f'(t) = \frac{41-40t}{20\,e^t}$
$20 > 0$ et $\forall\ t \in [0,025\ ;+\infty[$ on a : $20\,e^t > 0$
On en déduit que le signe de $f'(t)$ est celui de $41 - 40t$.
$41 - 40t > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 41 > 40t \quad \Leftrightarrow \quad t < \frac{41}{40} \quad \Leftrightarrow \quad t < 1,025$
Donc $f'(t)$ est strictement positive sur $[0,025\ ;1,025[$ et $f'(t)$ est strictement négative sur $[1,025\ ;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de f sur $[0,025\ ;+\infty[$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

t	$0,025$	$1,025$	$+\infty$
$f'(t)$	$+$		$-$
$f(t)$	0 $\nearrow$	$2\,e^{-1,025}$	$\searrow$ 0

Calcul des valeurs exactes :
$f(0,025) = (2 \times 0,025 - 0,05)e^{-0,025} = 0\,e^{-0,025} = 0$
$f(1,025) = (2 \times 1,025 - 0,05)e^{-1,025} = 2\,e^{-1,025}$