Nom : *Classe* : 2nde	**Devoir surveillé n°5** le 07/03/2016	*Note* : … / 20

	Avis de l'élève		*Avis du professeur*	
Je sais :	***Oui***	***Non***	***Oui***	***Non***
Exercice 1 (30 min)				
Déterminer les variations d'une fonction polynôme du 2nd degré.				
Justifier qu'une fonction polynôme du 2nd degré peut s'écrire sous différentes formes.				
Calculer des images / Déterminer des antécédents éventuels.				
Dresser le tableau de signe d'une fonction polynôme du 2nd degré.				
Construire la parabole associée à une fonction polynôme du 2nd degré.				
Déterminer l'axe de symétrie d'une parabole.				
Exercice 2 (10 min)				
Déterminer la forme canonique d'une fonction polynôme du 2nd degré.				
Déterminer l'extremum d'une fonction polynôme du 2nd degré.				
Déterminer les coordonnées du sommet d'une parabole.				
Exercice 3 (10 min)				
Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation de la forme $x^2 - a = 0$.				
Appliquer pas à pas l'algorithme de dichotomie.				

Exercice 1 : *f* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 2x + 8$. **… / 11,5**

1) Détermine les variations de *f* puis dresse le tableau de variation de *f*.

2) a) Justifie que, pour tout réel *x*, on a : $f(x) = -(x+1)^2 + 9$.

b) Justifie que, pour tout réel *x*, on a : $f(x) = (2-x)(x+4)$.

3) Détermine, à l'aide de la forme de $f(x)$ la plus adaptée :

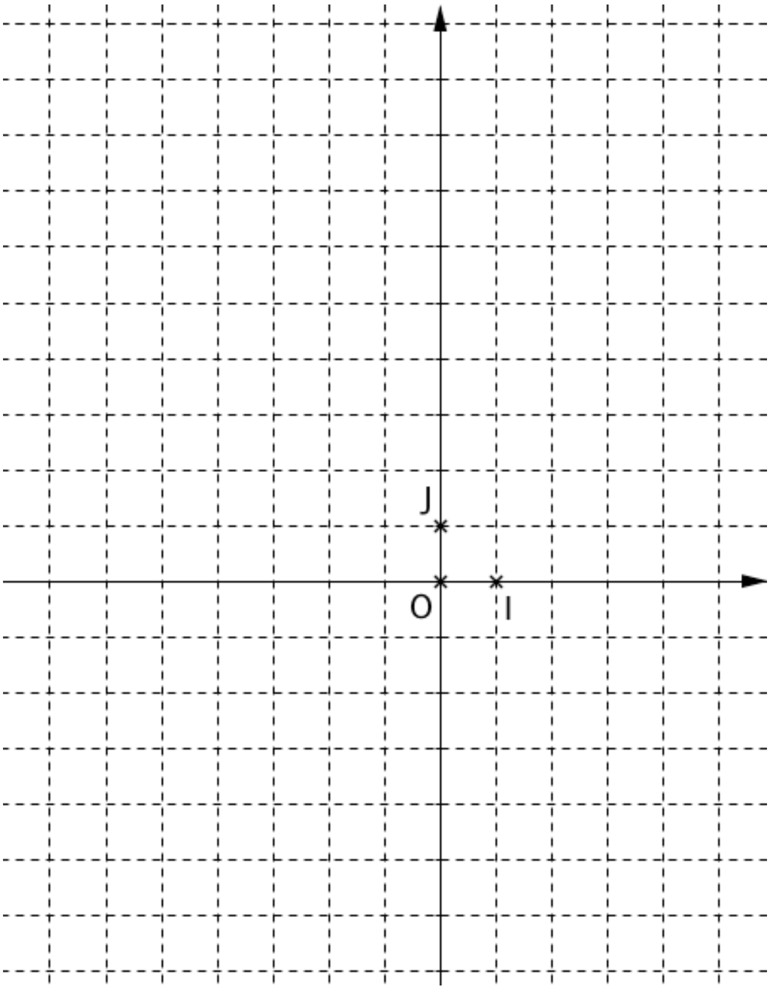
a) les images de -1 et $\sqrt{2}$.

b) les antécédents éventuels de 0 et 10.

4) Dresse le tableau de signes de $f(x)$.

5) a) Construis la courbe représentative $\mathscr{P}$ de *f* dans le repère orthonormé (O ; I, J) suivant.

b) Trace l'axe de symétrie de $\mathscr{P}$ en précisant son équation.



Exercice 2 : **… / 4**

1) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2+3x-2$.

   a) Détermine la forme canonique de $g(x)$.

   b) Déduis-en que g admet un extremum (à préciser).

2) h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+5$.

   Détermine les coordonnées du sommet S de la parabole représentative de h.

Exercice 3 : **… / 4,5**

On rappelle ci-dessous l'algorithme de dichotomie :

Variables	a, b, N, m sont des réels
Entrées	Saisir a, b, N, f
Traitement	**Pour** i allant de 1 à N **faire**
	m prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
	Si $f(a) \times f(m) < 0$ alors b prend la valeur m
	Sinon a prend la valeur m
	Fin Si
	Fin Pour
Sortie	Afficher a, b

a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2-7=0$.

b) Applique l'algorithme de dichotomie avec $a = 0$, $b = 4$ et $N = 3$, pour déterminer un encadrement de la solution positive de l'équation précédente à 0,5 près.

Correction du DS n°5

Exercice 1 : *f* est la fonction définie sur ℝ par $f(x)=-x^2-2x+8$.

1) Détermine les variations de *f* puis dresse le tableau de variation de *f*.

$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=-x^2-2x+8.$

$a=-1 \qquad b=-2 \qquad c=8$

$\alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{-2}=-1$

$\beta=f(\alpha)=-(-1)^2-2\times(-1)+8=-1+2+8=9$

$a=-1<0$ donc la parabole représentative de *f* est ouverte vers le bas. Son sommet est $S(-1\,;9)$.

On en déduit que *f* est :

- strictement croissante sur $]-\infty\,;-1]$.
- strictement décroissante sur $[-1\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f	↗	9	↘

2) a) Justifie que, pour tout réel *x*, on a : $f(x)=-(x+1)^2+9$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta=-(x+1)^2+9$

<u>Autre méthode</u> :

$\forall x\in\mathbb{R},\ A=-(x+1)^2+9=-(x^2+2x+1)+9=-x^2-2x-1+9=-x^2-2x+8=f(x)$

b) $\forall x\in\mathbb{R},\ A=(2-x)(x+4)=2x+8-x^2-4x=-x^2-2x+8=f(x)$

<u>Autre méthode</u> :

$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=-(x+1)^2+9=3^2-(x+1)^2=[3-(x+1)][3+(x+1)]=(3-x-1)(3+x+1)=(2-x)(x+4)$

3) Détermine, à l'aide de la forme de $f(x)$ la plus adaptée :

a) les images de -1 et $\sqrt{2}$.

$f(-1)=-(-1+1)^2+9=0+9=9$

$f(\sqrt{2})=-(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}+8$

$f(\sqrt{2})=-2-2\sqrt{2}+8$

$f(\sqrt{2})=6-2\sqrt{2}$

b) les antécédents éventuels de 0 et 10.

$f(x)=0$

$(2-x)(x+4)=0$

Or, un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Donc : $2-x=0$ ou : $x+4=0$

$x=2$ ou : $x=-4$

Donc 0 a deux antécédents par *f* : 2 et -4

$f(x)=10$

$-(x+1)^2+9=10$

$-(x+1)^2=10-9$

$-(x+1)^2=1$

$(x+1)^2=-1$

Or, un carré est toujours positif ou nul.

Donc cette équation n'a pas de solution.

On en déduit que 10 n'a pas d'antécédent par *f*.

4) Dresse le tableau de signes de $f(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=(2-x)(x+4)$

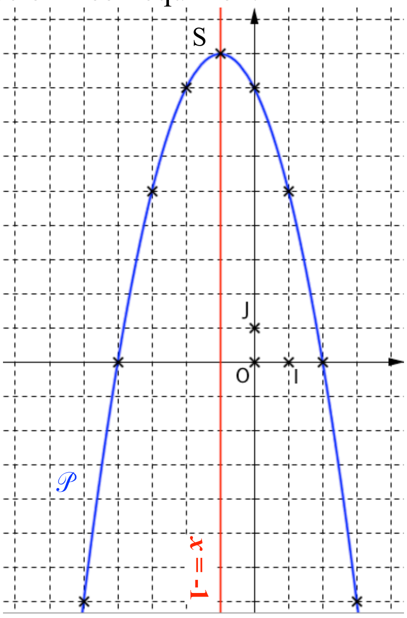
- $2-x>0 \Leftrightarrow 2>x \Leftrightarrow x<2$
- $x+4>0 \Leftrightarrow x>-4$

On en déduit le tableau de signes ci-contre :

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$2-x$		+		+	0	−	
$x+4$		−	0	+		+	
$f(x)$		−	0	+	0	−	

5) a) Construis la courbe représentative $\mathscr{P}$ de f dans le repère orthonormé $(O;I,J)$ suivant.

b) Trace l'axe de symétrie de $\mathscr{P}$ en précisant son équation.



Exercice 2 :

1) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2+3x-2$.

a) Détermine la forme canonique de $g(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=x^2+3x-2.$

$a = 1 \qquad b = 3 \qquad c = -2$

$\alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{-3}{2}$

$\beta=g(\alpha)=(-\frac{3}{2})^2+3\times(-\frac{3}{2})-2=\frac{9}{4}-\frac{9}{2}-2=\frac{9}{4}-\frac{18}{4}-\frac{8}{4}=-\frac{17}{4}$

$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=a(x-\alpha)^2+\beta=(x+\frac{3}{2})^2-\frac{17}{4}.$

b) Déduis-en que g admet un extremum (à préciser).

$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=(x+\frac{3}{2})^2-\frac{17}{4}$ et : $a=1>0.$

On en déduit que la parabole représentative de g est ouverte vers le haut et que son sommet $S(-\frac{3}{2};-\frac{17}{4})$ en est le point le plus bas. La fonction g admet donc pour minimum $-\frac{17}{4}$. Il est atteint en $x = -\frac{3}{2}$.

2) h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=-2(x-\frac{3}{4})^2+5$.

Détermine les coordonnées du sommet S de la parabole représentative de h.

$\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=-2(x-\frac{3}{4})^2+5.$

On en déduit : $a=-2$; $\alpha=\frac{3}{4}$; $\beta=5$

Le sommet de la parabole représentative de h est donc $S(\frac{3}{4};5)$.

Exercice 3 :

On rappelle ci-dessous l'algorithme de dichotomie :

```
Variables    a, b, N, m sont des réels
Entrées      Saisir a, b, N, f
Traitement   Pour i allant de 1 à N faire
               m prend la valeur (a + b)/2
               Si f(a) × f(m) < 0 alors b prend la valeur m
                 Sinon a prend la valeur m
               Fin Si
             Fin Pour
Sortie       Afficher a, b
```

a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 7 = 0$.

$x^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$

b) Applique l'algorithme de dichotomie avec $a = 0$, $b = 4$ et $N = 3$, pour déterminer un encadrement de la solution positive de l'équation précédente à 0,5 près.

- $a = 0$; $b = 4$; $N = 3$; $f(x) = x^2 - 7$
- Pour $i = 1$
  - $m = \frac{a+b}{2} = \frac{0+4}{2} = 2$
  - $f(a)\times f(m) = f(0)\times f(2) = (-7)\times(-3) = 21 > 0$
  - La condition $f(a)\times f(m) < 0$ est FAUSSE
  - Donc : $a = 2$
- Pour $i = 2$
  - $m = \frac{a+b}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$
  - $f(a)\times f(m) = f(2)\times f(3) = (-3)\times 2 = -6 < 0$
  - La condition $f(a)\times f(m) < 0$ est VRAIE
  - Donc : $b = 3$
- Pour $i = 3$
  - $m = \frac{a+b}{2} = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$
  - $f(a)\times f(m) = f(2)\times f(2{,}5) = (-3)\times(-0{,}75) = 2{,}25 > 0$
  - La condition $f(a)\times f(m) < 0$ est FAUSSE
  - Donc : $a = 2{,}5$
- Afficher : $a = 2{,}5$ et $b = 3$.

On en déduit : $2{,}5 < \sqrt{7} < 3$.