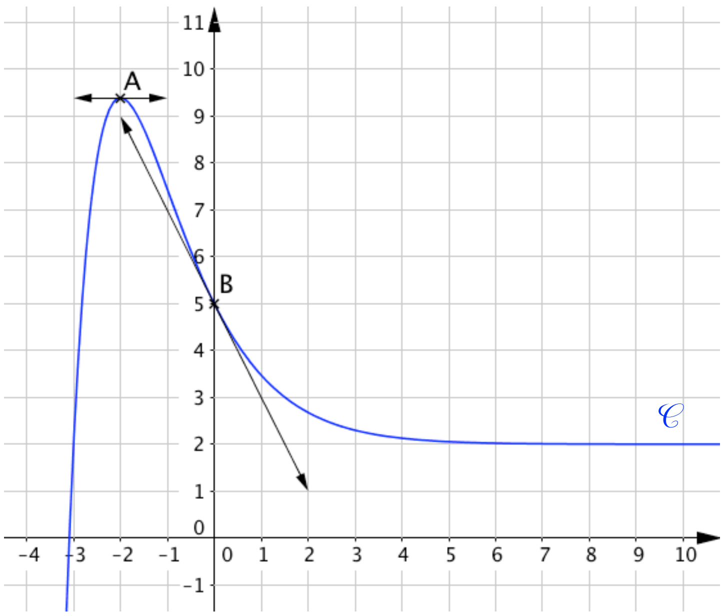
| | | |
|---|---|---|
| Nom :<br>Classe : T ES | **Devoir surveillé n°5**<br>le 05/02/2016 | Note :<br>… / 20 |

**La notation du devoir prendra en compte les efforts de soin, de présentation et de rédaction.**
Une fois que vous aurez fini ce devoir vous complèterez la grille d'autoévaluation suivante.

| | *Avis de l'élève* | | *Avis du professeur* | |
|---|---|---|---|---|
| ***Je sais :*** | ***Oui*** | ***Non*** | ***Oui*** | ***Non*** |
| **Exercice 1** | | | | |
| Déterminer graphiquement des images / des nombres dérivés. | | | | |
| Dériver une fonction et factoriser l'expression obtenue. | | | | |
| Justifier / Résoudre un système | | | | |
| Dresser le tableau de variation d'une fonction. | | | | |
| Déterminer les coordonnées du point d'inflexion d'une courbe. | | | | |
| **Exercice 2** | | | | |
| Justifier les expressions donnant des fonctions dérivées. | | | | |
| Justifier un tableau de variation. | | | | |
| Justifier l'existence et déterminer une valeur approchée d'une solution de $f(x) = 0$. | | | | |
| Dresser un tableau des signes / En déduire un tableau de variation. | | | | |
| Interpréter les résultats obtenus pour répondre à un problème de maximum. | | | | |
| **Exercice 3** | | | | |
| Résoudre une équation / une inéquation. | | | | |

**Exercice 1** : Etude d'une fonction comportant une exponentielle. **… / 9,5**

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente dans un repère orthogonal une fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $[-4;11]$. Les points A d'abscisse -2 et $B(0;5)$ sont sur la courbe $\mathscr{C}$.
Sont aussi représentées sur ce graphique les tangentes à la courbe aux points A et B, la tangente en A étant horizontale. On note $f'$ la fonction dérivée de $f$.




Partie A :

1) Par lecture graphique, détermine :
   a) $f'(-2)$ … / 0,5
   b) $f(0)$ et $f'(0)$ … / 1,5

2) La fonction $f$ est définie sur $[-4;11]$ par $f(x) = a + (x+b)e^{-x}$ où $a$ et $b$ sont deux réels à déterminer.
   a) Calcule $f'(x)$ pour tout réel $x$ de $[-4;11]$. … / 1
   b) A l'aide des questions 1b) et 2a) montre que les nombres $a$ et $b$ vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} a+b=5 \\ 1-b=-2 \end{cases}$$ … / 1

   c) Détermine alors les valeurs des nombres $a$ et $b$. … / 1

Partie B :

On admet que la fonction $f$ est définie sur $[-4\,;11]$ par $f(x) = 2 + (x+3)e^{-x}$.

1) a) Justifie que, pour tout réel $x$ de $[-4\,;11]$, $f'(x) = (-x-2)e^{-x}$. … / 1

b) Déduis-en le tableau de variation de $f$. … / 1,5

2) Détermine les coordonnées du point d'inflexion I de $\mathscr{C}$. … / 2

**Exercice 2** : Etude d'un bénéfice. **… / 8,5**

Une entreprise produit et vend des composants électroniques. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 1 000 et 50 000 pièces. On suppose que toute la production est commercialisée.

Le bénéfice en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de $x$ milliers de pièces, est donné sur l'intervalle $[1\,;50]$ par : $B(x) = -0{,}25x^2 + 5x - 75 + 2x\,ln(x)$

1) Montre que, pour tout réel $x$ de $[1\,;50]$, $B'(x) = -0{,}5x + 7 + 2\,ln(x)$. … / 1

2) a) Montre que, pour tout réel $x$ de $[1\,;50]$, $B''(x) = \frac{-x+4}{2x}$. … / 1

b) Justifie le tableau de variation ci-dessous de la fonction dérivée $B'$ sur l'intervalle $[1\,;50]$. … / 2

| $x$ | 1 | 4 | 50 |
|---|---|---|---|
| $B'(x)$ | 6,5 ↗ | $5 + 2\,ln4$ ↘ | $-18 + 2\,ln50$ |

3) a) Justifie que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $[1\,;50]$. … / 1

b) Donne une valeur approchée de $\alpha$ au millième près. … / 1

4) Déduis-en le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;50]$ et donne le tableau de variations de la fonction bénéfice B sur ce même intervalle. … / 1,5

5) Quel est le nombre de pièces à produire, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice maximal (arrondi au milliers d'euros) ? … / 1

**Exercice 3** : **… / 2**

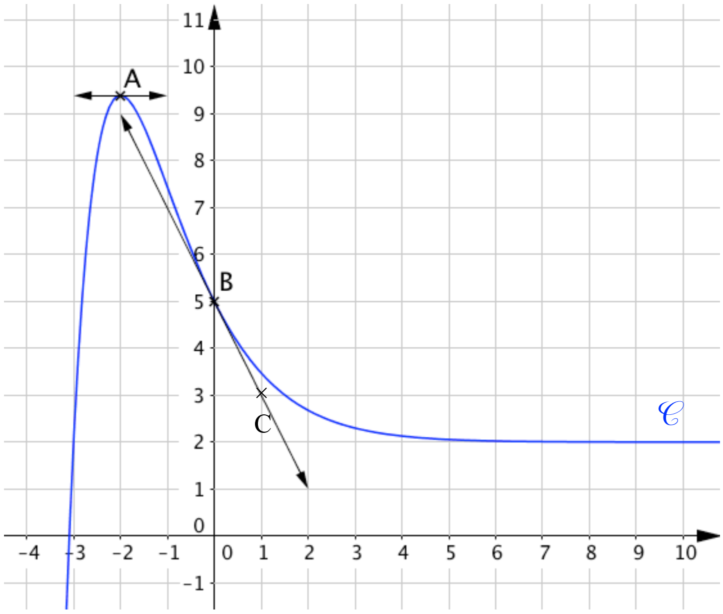
1) Résous l'équation $x^7 = 1{,}2$

2) Résous dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $0,5^n \leq 0{,}001$

**Correction DS n°5**

**Exercice 1** : Etude d'une fonction comportant une exponentielle.

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente dans un repère orthogonal une fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $[-4;11]$. Les points A d'abscisse -2 et $B(0;5)$ sont sur la courbe $\mathscr{C}$.
Sont aussi représentées sur ce graphique les tangentes à la courbe aux points A et B, la tangente en A étant horizontale. On note $f'$ la fonction dérivée de $f$.




Partie A :

1) a) La tangente au point A d'abscisse -2 est horizontale donc : $f'(-2) = 0$
b) $B(0;5) \in \mathscr{C}$ donc $f(0) = 5$.
Le point $C(1;3)$ appartient à la tangente à $\mathscr{C}$ au point B.
Donc : $f'(0) = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{3-5}{1-0} = -\dfrac{2}{1} = -2$

2) a) $\forall x \in [-4;11], f(x) = a + (x+b)e^{-x} = a + u(x)v(x)$
Donc : $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = x+b \\ v(x) = e^{-x} \end{cases}$ et : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$
$f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+b)(-e^{-x}) = 1e^{-x} - (x+b)e^{-x} = (1-x-b)e^{-x}$

b) $f(0) = 5$ donc : $a + (0+b)e^{-0} = 5$
Or : $e^{-0} = e^0 = 1$
Donc : $a + b = 5$
$f'(0) = -2$ donc : $(1 - 0 - b)e^{-0} = -2$
On en déduit : $1 - b = -2$

Finalement, $a$ et $b$ sont les solutions du système : $\begin{cases} a+b=5 \\ 1-b=-2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a+b=5 \\ 1-b=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} a+b=5 \\ -b=-2-1 \end{cases}$ $\begin{cases} a+b=5 \\ -b=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} a+b=5 \\ b=3 \end{cases}$ $\begin{cases} a+3=5 \\ b=3 \end{cases}$ $\begin{cases} a=5-3 \\ b=3 \end{cases}$ $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$

Partie B :

On admet que la fonction $f$ est définie sur $[-4;11]$ par $f(x) = 2 + (x+3)e^{-x}$.
1) a) $\forall x \in [-4;11], f(x) = 2 + (x+3)e^{-x} = 2 + u(x)v(x)$
Donc : $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = x+3 \\ v(x) = e^{-x} \end{cases}$ et : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$
D'après le résultat obtenu en partie A : $f'(x) = (1-x-b)e^{-x} = (1-x-3)e^{-x} = (-x-2)e^{-x}$

b) $\forall\, x \in [-4;11]$, $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x-2$ sur $[-4;11]$.

$-x-2>0 \Leftrightarrow -2>x \Leftrightarrow x<-2$

On en déduit le tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $-4$ | | $-2$ | | $11$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-x-2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

2) $\forall\, x \in [-4;11]$, $f'(x) = (-x-2)\,e^{-x} = u(x)v(x)$

Donc : $f''(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = -x-2 \\ v(x) = e^{-x} \end{cases}$ et : $\begin{cases} u'(x) = -1 \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$$f''(x) = -1\times e^{-x} + (-x-2)\,(-e^{-x}) = -1\,e^{-x} + (x+2)\,e^{-x} = (-1+x+2)\,e^{-x} = (x+1)\,e^{-x}$$

$\forall\, x \in [-4;11]$, $e^{-x} > 0$ donc :

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$

$f(-1) = 2 + (-1+3)\,e^{1} = 2+2e$

$f''$ s'annule et change de signe en $x=-1$ donc $\mathscr{C}$ admet I $(-1;2+2e)$ pour point d'inflexion.

**<u>Exercice 2</u>** : Etude d'un bénéfice.

Une entreprise produit et vend des composants électroniques. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 1 000 et 50 000 pièces. On suppose que toute la production est commercialisée.

Le bénéfice en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de $x$ milliers de pièces, est donné sur l'intervalle $[1;50]$ par : $B(x) = -0{,}25x^2 + 5x - 75 + 2x\,ln(x)$

1) $\forall\, x \in [1;50]$, $B(x) = -0{,}25x^2 + 5x - 75 + 2x\,ln(x)$

$B'(x) = -0{,}5\,x + 5 + u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = 2x \\ v(x) = \ln(x) \end{cases}$ et : $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

$$B'(x) = -0{,}5\,x + 5 + 2\ln(x) + 2x \times \frac{1}{x} = -0{,}5\,x + 5 + 2\ln(x) + 2 = -0{,}5\,x + 7 + 2\ln(x)$$

2) a) $\forall\, x \in [1;50]$, $B'(x) = -0{,}5x + 7 + 2\,ln(x)$

$$B''(x) = -0{,}5 + 2\times\frac{1}{x} = -0{,}5 + \frac{2}{x} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{x} = -\frac{x}{2x} + \frac{4}{2x} = \frac{-x+4}{2x}$$

b) $\forall\, x \in [1;50]$, $B''(x) = \dfrac{-x+4}{2x}$

Les variations de $B'$ dépendent du signe de $B''(x)$.

| $x$ | $1$ | | $4$ | | $50$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-x+4$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $2x$ | | $+$ | | $+$ | |
| $B''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $B'(x)$ | $6{,}5$ | $\nearrow$ | $5+2\,ln4$ | $\searrow$ | $-18+2\,ln50$ |

Calcul des valeurs dans le tableau :

$B'(1) = -0{,}5 + 7 + 2\,ln(1) = -0{,}5 + 7 = 6{,}5$

$B'(4) = -0{,}5\times 4 + 7 + 2\,ln(4) = -2 + 7 + 2\,ln(4) = 5 + 2\,ln(4)$

$B'(50) = -0{,}5\times 50 + 7 + 2\,ln(50) = -25 + 7 + 2\,ln(50) = -18 + 2\,ln(50)$

3) a) D'après le tableau de variation précédent $B'$ est strictement positive sur l'intervalle $[1;4]$.
Donc l'équation $B'(x) = 0$ n'admet aucune solution sur cet intervalle.
En revanche, $B'$ est continue, strictement décroissante et change de signe sur l'intervalle $[4;50]$ puisque :
$5 + 2\,ln(4) \approx 7{,}77 > 0$ et : $-18 + 2\,ln(50) \approx -10{,}18 < 0$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $B'(x) = 0$ admet une unique solution sur $[4;50]$.
Finalement, l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1;50]$. On la note $\alpha$.

b) En utilisant le tableur de la calculatrice on obtient :
$B'(27) \approx 0{,}09 > 0$ et : $B'(28) \approx -0{,}34 < 0$ Donc : $27 < \alpha < 28$
$B'(27{,}2) \approx 0{,}01 > 0$ et : $B'(27{,}3) \approx -0{,}04 < 0$ Donc : $27{,}2 < \alpha < 27{,}3$
$B'(27{,}21) \approx 0{,}0022 > 0$ et : $B'(27{,}22) \approx -0{,}0021 < 0$ Donc : $27{,}21 < \alpha < 27{,}22$
$B'(27{,}215) \approx 0{,}00004 > 0$ et : $B'(27{,}216) \approx -0{,}00039 < 0$ Donc : $27{,}215 < \alpha < 27{,}216$
27,215 et 27,216 sont deux valeurs approchées de $\alpha$ au millième près.

4) D'après le tableau de variation de $B'$ et la question 3, $B'$ est strictement positive sur $[1;4]$ et sur $[4;\alpha[$.
Donc $B'$ est positive sur $[1;\alpha]$ et négative sur $[\alpha;50]$. On en déduit le tableau de variation de B :

| $x$ | 1 | | $\alpha$ | | 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| $B'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $B(x)$ | | ↗ | | ↘ | |

5) D'après le tableau de variation de B, le bénéfice est maximal pour $x = \alpha \approx 27{,}215$.
Or : $B(27{,}215) = -0{,}25 \times 27{,}215^2 + 5 \times 27{,}215 - 75 + 2 \times 27{,}215 \times ln(27{,}215) \approx 55{,}735$.
On en déduit que l'entreprise réalise un bénéfice maximal de 55 735 € lorsqu'elle produit 27 215 pièces.

*Remarque* : La production de 27 216 pièces donne le même bénéfice.

**Exercice 3** :

1) $x^7 = 1{,}2$
$ln(x^7) = ln(1{,}2)$
$7\,ln(x) = ln(1{,}2)$
$ln(x) = \frac{ln(1{,}2)}{7}$
$x = e^{\frac{ln(1{,}2)}{7}}$

2) Résous dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $0{,}5^n \leq 0{,}001$
$ln(0{,}5^n) \leq ln(0{,}001)$
$n\,ln(0{,}5) \leq ln(0{,}001)$
$0 < 0{,}5 < 1$ donc : $ln(0{,}5) < 0$. On en déduit :
$n \geq \frac{ln(0{,}001)}{ln(0{,}5)}$
$\frac{ln(0{,}001)}{ln(0{,}5)} \approx 9{,}966$ et $n$ est un nombre entier donc :
$n \geq 10$