Nom :	**DS n°5**	*Classe* :
Prénom :	le 27/03/2018	BTS 1

Les exercices seront traités dans l'ordre de votre choix. La présentation et le soin apportés à la présentation de votre copie rentreront pour une part importante dans sa notation.

Exercice 1 : **… / 8**

Pour établir un modèle du rendement en trichlorométhane, un technicien réalise un plan factoriel d'expériences complet portant sur deux facteurs X_1 et X_2 qui représentent la température et la durée du passage des gaz dans le réacteur.
Ce plan d'expériences est construit selon l'algorithme de Yates.
On suppose que le rendement Y du phénomène est modélisé par une expression de la forme :

$$Y = a_0 + a_1\,X_1 + a_2\,X_2 + a_{12}\,X_1\,X_2 + \epsilon$$

où a_0, a_1, a_2 et a_{12} sont des réels et ϵ est une variable aléatoire qui suit une loi normale.
On attribue les niveaux suivants aux facteurs :

Niveau	-1	+1
Durée X_1	10 minutes	20 minutes
Température X_2	50 °C	100 °C

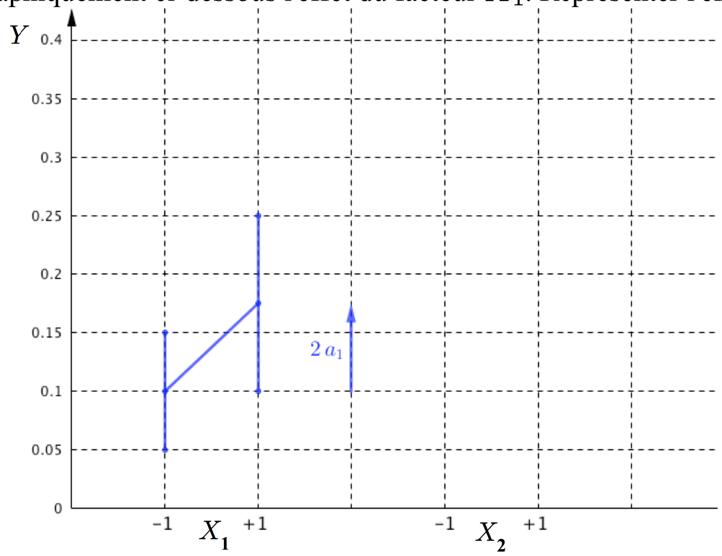
Les quatre expériences réalisées ont donné les résultats suivants :

Expérience	1	2	3	4
Durée	10 minutes	20 minutes	10 minutes	20 minutes
Température	50 °C	50 °C	100 °C	100 °C
Rendement	0,05	0,10	0,15	0,25

1. Compléter la matrice des effets et de l'interaction suivante.

Expérience	moyenne	X_1	X_2	X_1X_2	Y
1					
2					
3					
4					
Coefficient	a_0	a_1	a_2	a_{12}	a_0

2. Calculer les estimations ponctuelles des effets a_0, a_1, a_2 et de l'interaction a_{12}.
3. a) Interpréter le coefficient a_0 par rapport à ces expériences ?
   b) On a représenté graphiquement ci-dessous l'effet du facteur X_1. Représenter l'effet du facteur X_2.



   c) Que conseilleriez-vous au technicien pour obtenir un meilleur rendement ?
4. a) On suppose que l'estimation ponctuelle de a_{12} est arrondie à $0,013$ et que l'écart-type expérimental constaté est $\sigma = 0,005$. Déterminer l'intervalle de confiance de a_{12} au seuil de risque 5 %.
   b) L'interaction est-elle négligeable ? Justifier.
5. Donner l'expression du modèle qui permet de définir la réponse Y en fonction des facteurs X_1 et X_2.

Exercice 2 : **… / 7**

On produit du styrène par déshydrogénation catalytique de l'éthylbenzène. Pour étudier le rendement de cette production, on réalise un plan d'expérience 2^3 complet, construit selon l'algorithme de Yates. Les trois facteurs sont :

- X_1 : la nature du catalyseur
- X_2 : la température en degré Kelvin
- X_3 : le rapport molaire vapeur d'eau / éthylbenzène

En fonction du domaine expérimental, on attribue les niveaux suivants à chacun des facteurs :

Niveau	-1	+1
Catalyseur X_1	C_1	C_2
Température X_2	800 °K	1000 °K
Rapport molaire X_3	4/1	9/1

On réalise huit expériences dont les résultats sont donnés par le tableau suivant :

Expérience	1	2	3	4	5	6	7	8
Catalyseur	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2
Température	800 °K	800 °K	1000 °K	1000 °K	800 °K	800 °K	1000 °K	1000 °K
Rapport molaire	4/1	4/1	4/1	4/1	9/1	9/1	9/1	9/1
Rendement en %	46	40	92	80	48	42	95	85

Le modèle retenu pour le rendement Y est un modèle polynomial de la forme :

$$Y = a_0 + a_1\,X_1 + a_2\,X_2 + a_3\,X_3 + a_{12}\,X_1\,X_2 + a_{13}\,X_1\,X_3 + a_{23}\,X_2\,X_3 + a_{123}\,X_1\,X_2\,X_3 + \epsilon$$

1. Compléter la matrice complète des expériences et des effets.

Réponse n°	moyenne	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	Y
1									46
2									40
3									92
4									80
5									48
6									42
7									95
8									85
Coefficient	a_0	a_1	a_2	a_3	a_{12}	a_{13}	a_{23}	a_{123}	a_0

2. Calculer une estimation ponctuelle de chacun des coefficients du modèle.
3. On admet que a_1 est négatif. Quelle conclusion peut-on en tirer pour obtenir le meilleur rendement possible ?
4. En considérant qu'un effet ou une interaction dont la valeur absolue est inférieure à 1 % est non significatif, donner l'expression du modèle.
5. a) Déterminer la fonction affine $f_2 : x \mapsto ax + b$ qui permet de déterminer les niveaux des valeurs prises par X_2.

   b) Justifier que le niveau correspondant à une température de 950 °K est X_2 = 0,5.

   c) Déterminer le rendement de la production de styrène lorsqu'on utilise le catalyseur C_1 à une température de 950 °K et avec un rapport molaire de 9/1.

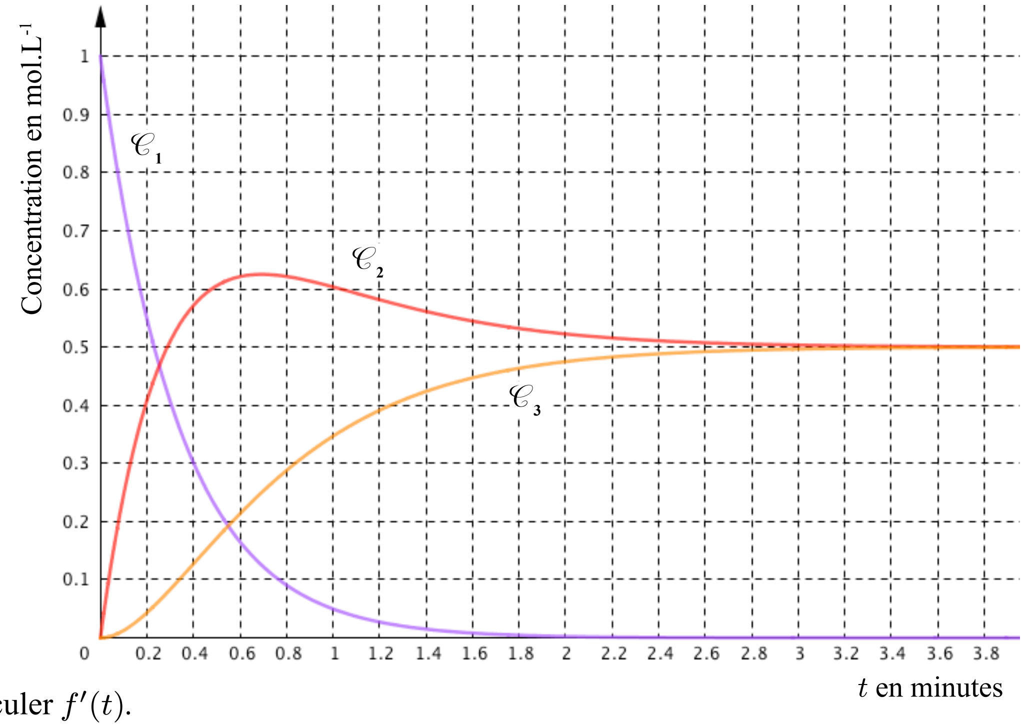
Exercice 3 : **… / 5**

On considère le schéma réactionnel : $A \to B \rightleftarrows C$ impliquant les produits A, B et C.

On suppose que les fonctions f, g et h qui à l'instant t, exprimé en minutes, associent les concentrations [A] de A, [B] de B et [C] de C, exprimées en mole par litre, sont respectivement définies par :

$$f(t) = e^{-3t} \qquad g(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-2t} - 2\,e^{-3t} \qquad h(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-2t} + e^{-3t}$$

Les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ tracées ci-dessous sont les représentations graphiques des fonctions f, g et h.



1. a) Calculer $f'(t)$.

   b) Déterminer le sens de variation de la fonction f. En déduire laquelle des trois courbes représente f.

2. a) Calculer l'instant t pour lequel les concentrations des produits A et C sont égales.
   On donnera une valeur exacte et une valeur de t arrondie à 0,01.

   b) En déduire la courbe qui est la représentation graphique de la fonction h.

3. a) Graphiquement, conjecturer la concentration finale du produit C.

   b) Retrouver ce résultat par un calcul de limite.

Correction du DS n°5

Exercice 1 :

Pour établir un modèle du rendement en trichlorométhane, un technicien réalise un plan factoriel d'expériences complet portant sur deux facteurs X_1 et X_2 qui représentent la température et la durée du passage des gaz dans le réacteur.
Ce plan d'expériences est construit selon l'algorithme de Yates.
On suppose que le rendement Y du phénomène est modélisé par une expression de la forme :

$$Y = a_0 + a_1\,X_1 + a_2\,X_2 + a_{12}\,X_1\,X_2 + \epsilon$$

où a_0, a_1, a_2 et a_{12} sont des réels et ϵ est une variable aléatoire qui suit une loi normale.
On attribue les niveaux suivants aux facteurs :

Niveau	-1	+1
Durée X_1	10 minutes	20 minutes
Température X_2	50 °C	100 °C

Les quatre expériences réalisées ont donné les résultats suivants :

Expérience	1	2	3	4
Durée	10 minutes	20 minutes	10 minutes	20 minutes
Température	50 °C	50 °C	100 °C	100 °C
Rendement	0,05	0,10	0,15	0,25

1. Compléter la matrice des effets et de l'interaction suivante.

Expérience	moyenne	X_1	X_2	X_1X_2	Y
1	1	-1	-1	+1	0,05
2	1	+1	-1	-1	0,10
3	1	-1	+1	-1	0,15
4	1	+1	+1	+1	0,25
Coefficient	a_0	a_1	a_2	a_{12}	a_0

2. Calculer les estimations ponctuelles des effets a_0, a_1, a_2 et de l'interaction a_{12}.

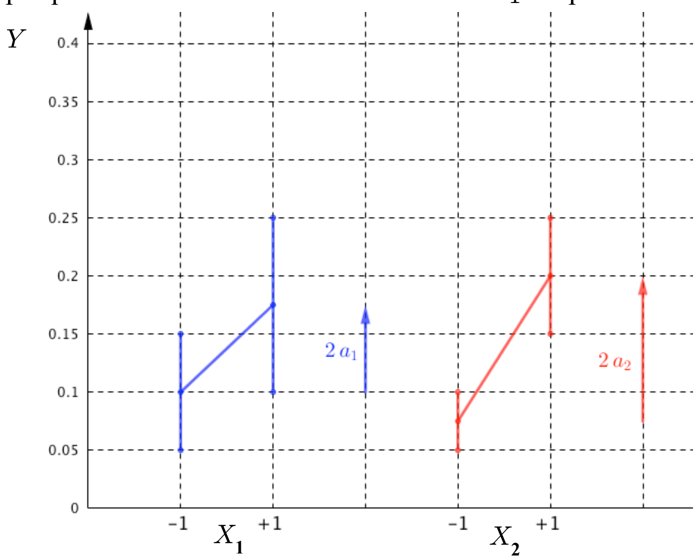
$a_0 = \frac{0{,}05+0{,}10+0{,}15+0{,}25}{4} = 0,1375$ $a_1 = \frac{-0{,}05+0{,}10-0{,}15+0{,}25}{4} = 0,0375$

$a_2 = \frac{-0{,}05-0{,}10+0{,}15+0{,}25}{4} = 0,0625$ $a_{12} = \frac{0{,}05-0{,}10-0{,}15+0{,}25}{4} = 0,0125$

3. a) Interpréter le coefficient a_0 par rapport à ces expériences ?

Le coefficient $a_0 = 0,1375$ correspond à la moyenne des rendements obtenus sur les quatre expériences.

b) On a représenté graphiquement ci-dessous l'effet du facteur X_1. Représenter l'effet du facteur X_2.



c) Que conseilleriez-vous au technicien pour obtenir un meilleur rendement ?

Pour obtenir un meilleur rendement, le technicien devrait augmenter le facteur durée et le facteur température.

4. a) On suppose que l'estimation ponctuelle de a_{12} est arrondie à $0,013$ et que l'écart-type expérimental constaté est $\sigma = 0,005$. Déterminer l'intervalle de confiance de a_{12} au seuil de risque 5 %.

I = $[a_{12} - \frac{1,96\,\sigma}{\sqrt{N}} \; ; a_{12} + \frac{1,96\,\sigma}{\sqrt{N}}] = [0,013 - \frac{1,96 \times 0,005}{\sqrt{4}} \; ; 0,013 + \frac{1,96 \times 0,005}{\sqrt{4}}] = [0,0081 \; ; 0,0179]$

b) L'interaction est-elle négligeable ? Justifier.

$0 \notin [0,0081 \; ; 0,0179]$ donc l'interaction a_{12} n'est pas négligeable, au seuil de risque d'erreur de 5 %.

5. Donner l'expression du modèle qui permet de définir la réponse Y en fonction des facteurs X_1 et X_2.

$Y = a_0 + a_1\,X_1 + a_2\,X_2 + a_{12}\,X_1\,X_2 + \epsilon$ $Y = 0,1375 + 0,0375\,X_1 + 0,0625\,X_2 + 0,0125\,X_1 X_2 + \epsilon$

Exercice 2 :

On produit du styrène par déshydrogénation catalytique de l'éthylbenzène. Pour étudier le rendement de cette production, on réalise un plan d'expérience 2^3 complet, construit selon l'algorithme de Yates. Les trois facteurs sont :

- X_1 : la nature du catalyseur
- X_2 : la température en degré Kelvin
- X_3 : le rapport molaire vapeur d'eau / éthylbenzène

En fonction du domaine expérimental, on attribue les niveaux suivants à chacun des facteurs :

Niveau	-1	+1
Catalyseur X_1	C_1	C_2
Température X_2	800 °K	1000 °K
Rapport molaire X_3	4/1	9/1

On réalise huit expériences dont les résultats sont donnés par le tableau suivant :

Expérience	1	2	3	4	5	6	7	8
Catalyseur	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2
Température	800 °K	800 °K	1000 °K	1000 °K	800 °K	800 °K	1000 °K	1000 °K
Rapport molaire	4/1	4/1	4/1	4/1	9/1	9/1	9/1	9/1
Rendement en %	46	40	92	80	48	42	95	85

Le modèle retenu pour le rendement Y est un modèle polynomial de la forme :

$$Y = a_0 + a_1\,X_1 + a_2\,X_2 + a_3\,X_3 + a_{12}\,X_1\,X_2 + a_{13}\,X_1\,X_3 + a_{23}\,X_2\,X_3 + a_{123}\,X_1\,X_2\,X_3 + \epsilon$$

1. Compléter la matrice complète des expériences et des effets.

Réponse n°	moyenne	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	Y
1	1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	46
2	1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	40
3	1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	92
4	1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	80
5	1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	48
6	1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	42
7	1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	95
8	1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	85
Coefficient	a_0	a_1	a_2	a_3	a_{12}	a_{13}	a_{23}	a_{123}	a_0

2. Calculer une estimation ponctuelle de chacun des coefficients du modèle.

$a_0 = \frac{46+40+92+80+48+42+95+85}{8} = 66$ %	$a_1 = \frac{-46+40-92+80-48+42-95+85}{8} = -4,25$ %
$a_2 = \frac{-46-40+92+80-48-42+95+85}{8} = 22$ %	$a_3 = \frac{-46-40-92-80+48+42+95+85}{8} = 1,5$ %
$a_{12} = \frac{46-40-92+80+48-42-95+85}{8} = -1,25$ %	$a_{13} = \frac{46-40+92-80-48+42-95+85}{8} = 0,25$ %
$a_{23} = \frac{46+40-92-80-48-42+95+85}{8} = 0,5$ %	$a_{123} = \frac{-46+40+92-80+48-42-95+85}{8} = 0,25$ %

3. On admet que a_1 est négatif. Quelle conclusion peut-on en tirer pour obtenir le meilleur rendement possible ?

a_1 est négatif donc le rendement diminue lorsque le facteur X_1 passe du niveau bas au niveau haut.
Pour obtenir un meilleur rendement il faut donc utiliser le catalyseur C_1.

4. En considérant qu'un effet ou une interaction dont la valeur absolue est inférieure à 1 % est non significatif, donner l'expression du modèle.

Les effets et interactions inférieurs à 1 % en valeur absolue sont $a_{13} = 0,25$ %, $a_{23} = 0,5$ % et $a_{123} = 0,3125$ %.
Ces facteurs sont non significatifs, on peut les négliger dans l'expression du modèle :

$$Y = 66 - 4,25\, X_1 + 22\, X_2 + 1,5\, X_3 - 1,25\, X_1\, X_2 + \epsilon$$

5. a) Déterminer la fonction affine $f_2 : x \mapsto ax + b$ qui permet de déterminer les niveaux des valeurs prises par X_2.

La fonction affine $f_2 : x \mapsto ax + b$ est telle que :

$$\begin{cases} f_2(800) = \text{-}1 \\ f_2(1000) = +1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 800\, a + b = \text{-}1 \\ 1000\, a + b = +1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 800\, a + b = \text{-}1 \\ 1000\, a - 800\, a + b - b = +1 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 800\, a + b = \text{-}1 \\ 200\, a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 800\, a + b = \text{-}1 \\ a = \frac{2}{200} = 0,01 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{200} = 0,01 \\ b = \text{-}1 - 800 \times 0,01 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{200} = 0,01 \\ b = \text{-}9 \end{cases}$$

Finalement, f_2 est définie par $f_2(x) = 0,01\, x - 9$

b) Justifier que le niveau correspondant à une température de 950 °K est $X_2 = 0{,}5$.

$f_2(950) = 0,01 \times 950 - 9 = 9,5 - 9 = 0,5$

c) Déterminer le rendement de la production de styrène lorsqu'on utilise le catalyseur C_1 à une température de 950 °K et avec un rapport molaire de 9/1.

On utilise :

- le catalyseur C_1 donc $X_1 = \text{-}1$
- à une température de 950 °K donc $X_2 = 0,5$.
- et avec un rapport molaire de 9/1 donc $X_3 = 1$.

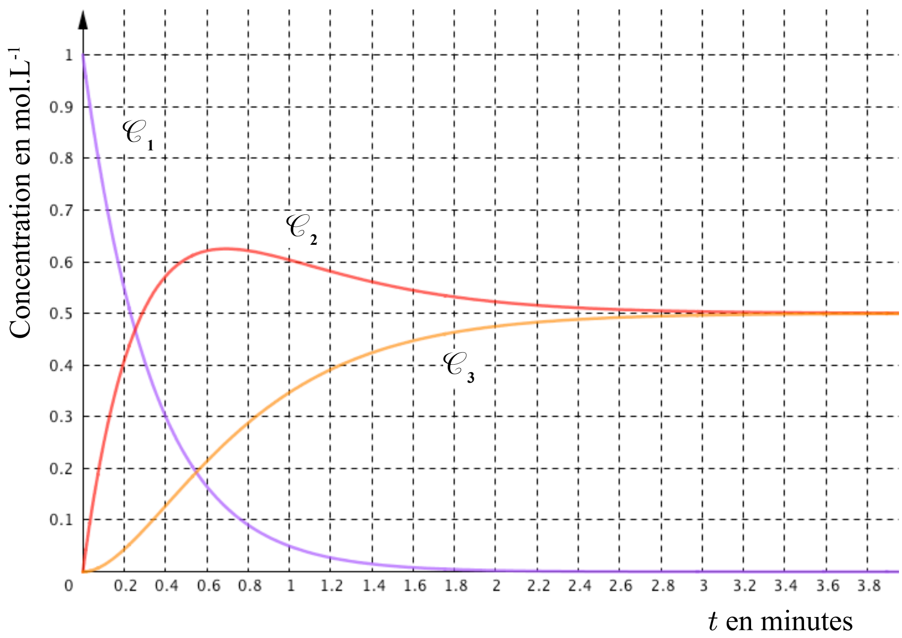
$Y = 66 - 4,25 \times (\text{-}1) + 22 \times 0,5 + 1,5 \times 1 - 1,25 \times (\text{-}1) \times 0,5 = 83,375$
Le rendement est donc de $83,375$ %

Exercice 3 :

On considère le schéma réactionnel : A $\rightarrow$ B $\rightleftarrows$ C impliquant les produits A, B et C.
On suppose que les fonctions f, g et h qui à l'instant t, exprimé en minutes, associent les concentrations [A] de A, [B] de B et [C] de C, exprimées en mole par litre, sont respectivement définies par :

$$f(t) = e^{-3t} \qquad g(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-2t} - 2\,e^{-3t} \qquad h(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-2t} + e^{-3t}$$

Les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ tracées ci-dessous sont les représentations graphiques des fonctions f, g et h.



1. a) Calculer $f'(t)$.

$\forall\, t \in [0\,;+\infty[,\ f(t) = e^{-3t}$
$f'(t) = -3\,e^{-3t}$

b) Déterminer le sens de variation de la fonction f. En déduire laquelle des trois courbes représente f.

$\forall\, t \in [0\,;+\infty[,\ f'(t) = -3\,e^{-3t}$
$-3 < 0$ et $\forall\, t \in [0\,;+\infty[,\ e^{-3t} > 0$ donc $f'(t) < 0$
Donc f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$. On en déduit que f est représentée graphiquement par la courbe $\mathscr{C}_1$.

2. a) Calculer l'instant t pour lequel les concentrations des produits A et C sont égales.
On donnera une valeur exacte et une valeur de t arrondie à 0,01.

On résout $f(t) = h(t)$
$e^{-3t} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-2t} + e^{-3t} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-2t} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}e^{-2t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-2t} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow -2t = ln\,\frac{1}{3} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}\,ln\,3$
On en déduit $t \approx 0,55$

b) En déduire la courbe qui est la représentation graphique de la fonction h.

On a : $f(t) = h(t) \Leftrightarrow t \approx 0,55$
Ce qui correspond, au vu du graphique, à l'abscisse du point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$.
On en déduit que la représentation graphique de la fonction h est $\mathscr{C}_3$.

3. a) Graphiquement, conjecturer la concentration finale du produit C.

Graphiquement, la concentration finale du produit C semble être égale à $0,5$ mol.L^{-1}.

b) Retrouver ce résultat par un calcul de limite.

$\forall\, t \in [0\,;+\infty[,\ h(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-2t} + e^{-3t}$
On sait que : $\lim\limits_{t \to +\infty} -2t = \lim\limits_{t \to +\infty} -3t = -\infty$ et que : $\lim\limits_{T \to -\infty} e^{T} = 0$
On en déduit, par composée de limites : $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-2t} = \lim\limits_{t \to +\infty} e^{-3t} = 0$
Finalement, par produit et sommes de limites : $\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-2t} + e^{-3t} = \frac{1}{2} = 0,5$ mol.L^{-1}.