Nom :
Classe : T S

DS n°5
le 10/02/2017

Note :
… / 20

	Avis de l'élève		*Avis du professeur*	
Connaissances / Compétences évaluées	***Oui***	***Non***	***Oui***	***Non***
Modéliser une situation à l'aide d'un arbre pondéré.				
Calculer des probabilités.				
Justifier qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale.				
Justifier qu'une fonction est périodique.				
Dériver une fonction.				
Etudier le signe d'une fonction trigonométrique.				
Compétences générales évaluées				
Lectures graphiques (extremum, parité d'une fonction trigonométrique)				
Utilisation de la calculatrice.				
Maîtrise des calculs / Arrondis				
Qualité de la rédaction des réponses / Rigueur / Justifier / Argumenter				

Barème	Ex 1 : 10 points	Ex 2 : 10 points	Total : 20 points
Note de l'élève			

Exercice 1 : **… / 10**

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante. Les probabilités seront arrondies à 10^{-4} près.

Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8 h 00. Pour cela il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : le vélo ou le bus.

Partie A

L'élève part tous les jours à 7 h 40 de son domicile et doit arriver à 8 h 00 à son lycée.
Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps. Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans 99,4 % des cas. Lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans 5 % des cas.
On choisit une date au hasard, en période scolaire et on note :

- V l'évènement « L'élève se rend au lycée à vélo »
- B l'évènement « L'élève se rend au lycée en bus »
- R l'évènement « L'élève arrive en retard au lycée ».

1. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement $V \cap R$ puis interpréter le résultat.
3. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est 0,0192.
4. Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?

Partie B

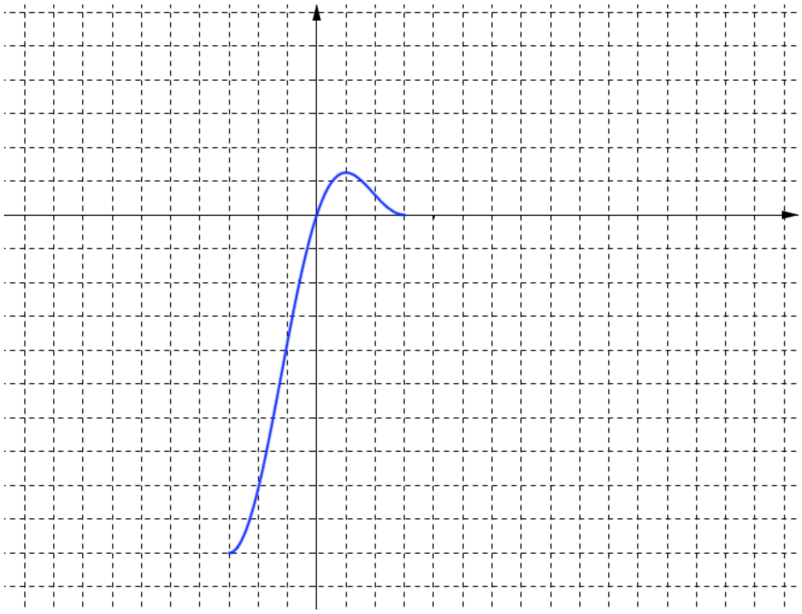
La période scolaire de la rentrée de janvier aux vacances de février contient 7 semaines de 5 jours.
On suppose que les arrivées en retard sont indépendantes d'un jour à l'autre.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de jours pendant lesquels l'élève est arrivé en retard au lycée durant cette période.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer $P(X = 2)$ puis interpréter le résultat.
3. Le CPE du lycée, Mr Daniel, sanctionne les élèves à partir de 3 arrivées en retard sur la période.
   Calculer la probabilité que l'élève soit sanctionné sur cette période.

Exercice 2 : **… / 10**

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = sin(x) - [sin(x)]^2$.

1. La courbe représentative $\mathscr{C}$ de f est donnée ci-dessous sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$.
   (Unités graphiques : $X_{\textbf{Pas}} = \frac{\pi}{6}$ $\qquad$ $Y_{\textbf{Pas}} = 0{,}2$)



   a) Pour quelle valeur de x le maximum de f semble-t-il atteint sur $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$?

   b) La fonction f semble-t-elle paire ? Impaire ? Justifier graphiquement puis par des calculs.

2. a) Démontrer que la fonction f est périodique de période 2π.

   b) En déduire que l'on peut étudier f sur $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$. Quelle conséquence graphique peut-on en tirer ?

3. a) Déterminer $f'(x)$.

   b) Etudier le signe de $cos(x)$ puis de $-2sin(x) + 1$ sur $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$.
   En déduire le tableau de variation de f sur $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$.

   c) Identifier les extrema locaux en précisant les valeurs de x en lesquelles ils sont atteints.

4. a) Utiliser la calculatrice pour compléter le tableau de valeurs suivant, sur $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$, avec un pas de $\frac{\pi}{6}$.
   Les résultats seront arrondis à 0,1 près.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$						$\frac{3\pi}{2}$
$f(x)$													

   b) Compléter l'allure de la courbe $\mathscr{C}$ en plaçant les tangentes horizontales.

Correction du DS n°5

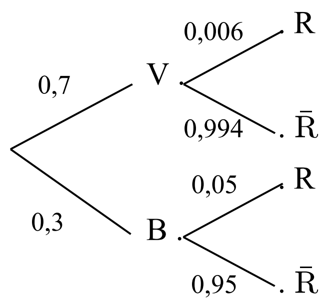
Exercice 1 :

Partie A

L'élève part tous les jours à 7 h 40 de son domicile et doit arriver à 8 h 00 à son lycée.
Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps. Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans 99,4 % des cas. Lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans 5 % des cas.
On choisit une date au hasard, en période scolaire et on note :

- V l'évènement « L'élève se rend au lycée à vélo »
- B l'évènement « L'élève se rend au lycée en bus »
- R l'évènement « L'élève arrive en retard au lycée ».

1.



2. $P(V \cap R) = P(V) \times P_V(R) = 0{,}7 \times 0{,}006 = 0{,}0042$
   La probabilité que l'élève arrive en retard en ayant pris le bus est égale à 0,0042.
3. $P(R) = P(V \cap R) + P(B \cap R) = 0{,}0042 + P(B) \times P_B(R) = 0{,}0042 + 0{,}3 \times 0{,}05$
   $P(R) = 0{,}0042 + 0{,}015 = 0{,}0192$.
4. $P_R(B) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}015}{0{,}0192} \approx 0{,}7813$
   La probabilité que l'élève se soit rendu en bus au lycée, sachant qu'il était en retard est d'environ 0,7813.

Partie B

La période scolaire de la rentrée de janvier aux vacances de février contient 7 semaines de 5 jours.
On suppose que les arrivées en retard sont indépendantes d'un jour à l'autre.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de jours pendant lesquels l'élève est arrivé en retard au lycée durant cette période.

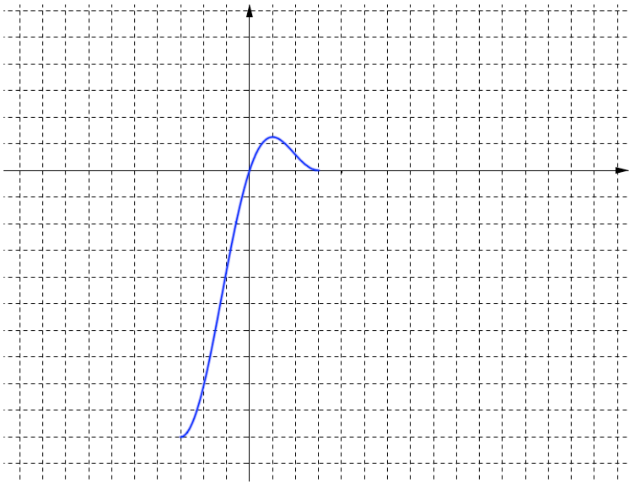
1. « Choisir un jour au hasard et observer si l'élève est arrivé en retard ce jour là » est une épreuve de Bernoulli car il n'y a que 2 issues possibles : S et $\bar{S}$.
   On notant S l'évènement « L'élève est arrivé en retard », on a, d'après la partie A : $P(S) = 0{,}0192$.
   La période scolaire de la rentrée de janvier aux vacances de février contient 7 semaines de 5 jours, c'est-à-dire 35 jours. On répète l'épreuve de Bernoulli 35 fois dans des conditions d'indépendance et on obtient un schéma de Bernoulli. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'arrivées en retard sur cette période scolaire. X prend les valeurs entières de 0 à 35. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(35 ; 0{,}0192)$.
2. $P(X=2) = \binom{35}{2} 0{,}0192^2 (1-0{,}0192)^{33} \approx 0{,}1157$
   La probabilité que l'élève arrive 2 jours en retard sur la période de 35 jours est d'environ 0,1157.
   Remarque : Pour obtenir ce résultat on tape :
   - BinomialPD(2,35,0.0192) sur CASIO
   - binomFdp(35,0.0192,2) ou binompdf(35,0.0192,2) sur TI
3. Le CPE du lycée, Mr Daniel, sanctionne les élèves à partir de 3 arrivées en retard sur la période.
   $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0{,}0293$
   La probabilité que l'élève soit sanctionné sur cette période est d'environ 0,0293.
   Remarque : Pour obtenir ce résultat on tape :
   - 1 – BinomialCD(2,35,0.0192) sur CASIO
   - 1 – binomFrèp(35,0.0192,2) ou 1 – binomcdf(35,0.0192,2) sur TI

Exercice 2 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = sin(x) - [sin(x)]^2$.

1. La courbe représentative $\mathscr{C}$ de f est donnée ci-dessous sur l'intervalle [-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$].

   (Unités graphiques : $X_{\mathbf{Pas}} = \frac{\pi}{6}$ $Y_{\mathbf{Pas}} = 0{,}2$)



   a) Le maximum de f semble atteint sur [-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$] pour $x = \frac{\pi}{6}$.

   b) La fonction f ne semble pas paire car sa courbe représentative $\mathscr{C}$ n'est pas symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Elle ne semble pas impaire car $\mathscr{C}$ n'est pas symétrique par rapport à l'origine du repère.

   $\forall$ $x \in$ [-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$], - $x \in$ [-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$] et : $f(-x) = sin(-x) - [sin(-x)]^2$

   $f(-x) = -sin(x) - [-sin(x)]^2$

   $f(-x) = -sin(x) - [sin(x)]^2$

   Puisque $f(-x) \neq f(x)$ alors la fonction f n'est pas paire sur [-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$].

   Puisque $f(-x) \neq - f(x)$ alors la fonction f n'est pas impaire sur [-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$].

2. a) $\forall$ $x \in \mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ et : $f(x + 2\pi) = sin(x + 2\pi) - [sin(x + 2\pi)]^2$

   Or, la fonction sinus étant 2π périodique sur $\mathbb{R}$, on a : $sin(x + 2) = sin(x)$

   Donc : $f(x + 2\pi) = sin(x) - [sin(x)]^2 = f(x)$

   On en déduit que f est périodique de période 2π.

   b) $\frac{3\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$

   Puisque f est périodique de période 2π et que l'intervalle [-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$] est d'amplitude 2π, on peut se contenter d'étudier f sur [-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$].

   On pourra tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$ en appliquant des translations de vecteurs $2\pi\,\vec{i}$ et $-2\pi\,\vec{i}$.

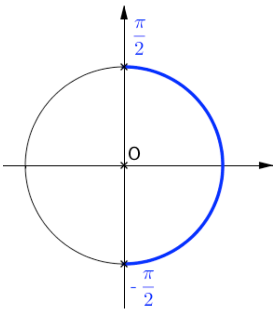
3. a) $\forall$ $x \in$ [-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$], $f(x) = sin(x) - [sin(x)]^2 = u(x) - [u(x)]^2$ avec : $u(x) = sin(x)$

   $f'(x) = u'(x) - 2u'(x)u(x)$ $u'(x) = cos(x)$

   $f'(x) = cos(x) - 2cos(x)sin(x)$

   $f'(x) = cos(x)[1 - 2sin(x)]$

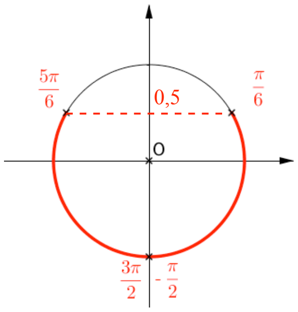
   b) Sur [-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$] :



   $cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$

   $cos(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

   $cos(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}[$



$-2sin(x)+1=0 \Leftrightarrow 2sin(x)=1 \Leftrightarrow sin(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}$ ou $x=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$

$-2sin(x)+1>0 \Leftrightarrow 2sin(x)<1 \Leftrightarrow sin(x)<\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\in\,]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{6}[\,\cup\,]\frac{5\pi}{6}\,;\frac{3\pi}{2}[$

$-2sin(x)+1<0 \Leftrightarrow x\in\,]\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}[$

On en déduit le tableau de signes et de variations suivant :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$
$cos(x)$	0	+		+	0	−		−	0
$-2sin(x)+1$		+	0	−		−	0	+	
$f'(x)$	0	+	0	−	0	+	0	−	0
$f(x)$	-2	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	-2

$f(-\frac{\pi}{2})=sin(-\frac{\pi}{2})-[sin(-\frac{\pi}{2})]^2=-1-(-1)^2=-2$
$f(\frac{\pi}{6})=sin(\frac{\pi}{6})-[sin(\frac{\pi}{6})]^2=\frac{1}{2}-(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$
$f(\frac{\pi}{2})=sin(\frac{\pi}{2})-[sin(\frac{\pi}{2})]^2=1-(1)^2=0$
$f(\frac{5\pi}{6})=sin(\frac{5\pi}{6})-[sin(\frac{5\pi}{6})]^2=\frac{1}{2}-(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$
$f(\frac{3\pi}{2})=sin(\frac{3\pi}{2})-[sin(\frac{3\pi}{2})]^2=-1-(-1)^2=-2$

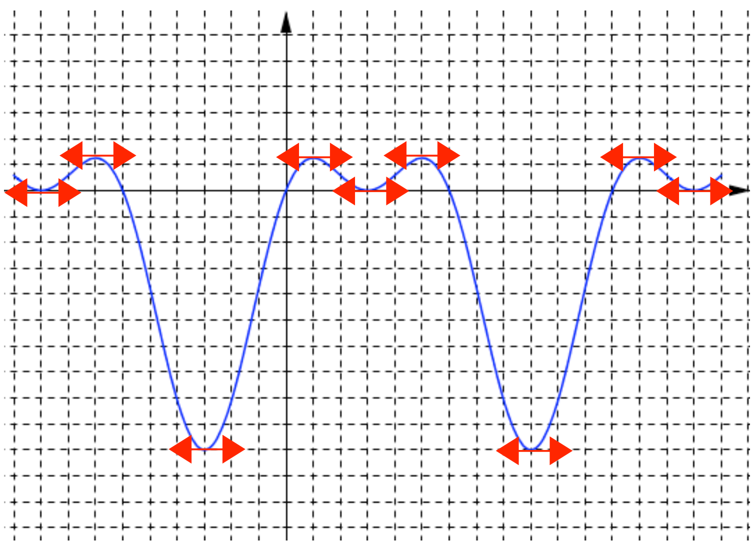
c) Puisque $f'(x)$ s'annule et change de signe en $\frac{\pi}{6}$, en $\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{5\pi}{6}$, la fonction f admet 3 extrema locaux. La lecture du tableau de variations permet d'identifier des maximums de $\frac{1}{4}$ en $x=\frac{\pi}{6}$ et en $x=\frac{5\pi}{6}$, ainsi qu'un minimum local de 0 en $x=\frac{\pi}{2}$.

Remarque : f admet - 2 comme minimum global sur $[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}]$.

4. a) Utiliser la calculatrice pour compléter le tableau de valeurs suivant, sur $[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}]$, avec un pas de $\frac{\pi}{6}$.
Les résultats seront arrondis à 0,1 près.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
$f(x)$	-2	-1,6	-0,8	0	0,3	0,1	0	0,1	0,3	0	-0,8	-1,6	-2

b) Compléter l'allure de la courbe $\mathscr{C}$ en plaçant les tangentes horizontales.



Remarque : - 2 devient un minimum local de f sur $\mathbb{R}$.