

Nom :
Prénom :

DS n°5
le 21/01/2020

Classe : T S 5

Capacités évaluées :	Avis du professeur	
	Non acquis	Acquis
Représenter une situation à l'aide d'un arbre pondéré et en déduire des calculs de probabilités.	_____	_____▶
Justifier qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale et calculer des probabilités dans ce cas.	_____	_____▶
Prendre des initiatives pour résoudre un problème.	_____	_____▶
Calculer dans \mathbb{C} – Ecrire un nombre complexe sous forme algébrique.	_____	_____▶
Résoudre des équations dans \mathbb{C}	_____	_____▶

Les exercices seront traités dans l'ordre de votre choix. La présentation et le soin apportés à la présentation de votre copie rentreront pour une part importante dans sa notation.

Exercice 1 : L'amateur de thé

... / 7

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Partie A

Un grossiste achète 80 % de ses boîtes de thé vert chez un fournisseur A, les autres chez un fournisseur B. 10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides alors que 20 % de celles achetées au fournisseur B en contiennent. On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les événements suivants :

- A (resp. B) : « La boîte provient du fournisseur A (resp. B) »
- S : « La boîte présente des traces de pesticides »

1. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. a) Quelle est la probabilité de l'événement $B \cap S$?
b) Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides vaut 0,88.
3. On constate que la boîte prélevée contient des traces de pesticides. Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Partie B

Un gérant de salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par le tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise. On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

Exercice 2 : Campagne publicitaire.

... / 3

La directrice du marketing d'une grande entreprise doit concevoir une campagne publicitaire pour le lancement d'un nouveau produit sur le marché et s'interroge sur la durée de cette campagne. Une enquête a permis de modéliser la situation de la façon suivante :

- La probabilité qu'une personne connaisse le nouveau produit après n semaines de publicité est :

$$p(n) = \frac{5n}{6n + 30}$$

- Si une personne connaît le produit après n semaines, la probabilité qu'elle l'achète est 0,7.
- Si une personne ne connaît pas le produit après n semaines, la probabilité qu'elle l'achète est 0,2.

On interroge une personne au hasard après n semaines de publicité et on considère les événements suivants :

- C : « La personne connaît le produit »
- A : « La personne achète le produit »

Combien de jours de publicité la directrice du marketing doit-elle programmer pour que la probabilité de A soit supérieure à 0,5 ?

Exercice 3 : Ecrire chacun des nombres complexes sous forme algébrique.

... / 6

$$a = 2(1 - 3i) - (1 - i)$$

$$b = (1 + 2i)(3 - i)$$

$$c = (\sqrt{2} - i\sqrt{3})(\sqrt{2} + i\sqrt{3})$$

$$d = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$e = \frac{-2i}{5 + i}$$

$$f = \frac{4 + 2i}{3 - 3i}$$

Exercice 4 : Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes et écrire les solutions sous forme algébrique.

... / 4

a) $z^2 = -9$

b) $(z - 2 + i)(z - 5i) = 0$

c) $2iz + 1 = 8i$

d) $(1 + i)\bar{z} = 1 - 3\bar{z}$

Correction du DS n°5

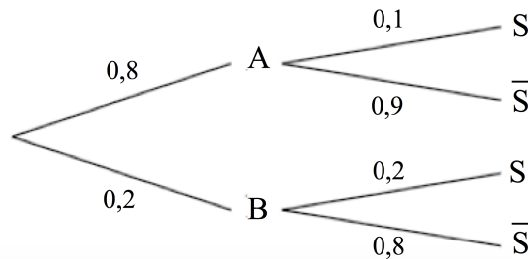
Exercice 1 : Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Partie A

Un grossiste achète 80 % de ses boîtes de thé vert chez un fournisseur A, les autres chez un fournisseur B. 10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides alors que 20 % de celles achetées au fournisseur B en contiennent. On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les événements suivants :

- A (resp. B) : « La boîte provient du fournisseur A (resp. B) »
- S : « La boîte présente des traces de pesticides »

1. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.



2. a) Quelle est la probabilité de l'événement $B \cap S$?

$$P(B \cap S) = P(B) \times P_B(S) = 0,2 \times 0,2 = 0,04$$

b) Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides vaut 0,88.

$$P(\bar{S}) = P(A \cap \bar{S}) + P(B \cap \bar{S}) = 0,8 \times 0,9 + 0,2 \times 0,8 = 0,72 + 0,16 = 0,88$$

Ainsi, la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides vaut effectivement 0,88

3. On constate que la boîte prélevée contient des traces de pesticides. Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

$$P_S(B) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{P(B \cap S)}{1 - P(\bar{S})} = \frac{0,04}{0,12} = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

Ainsi, la probabilité que la boîte prélevée provienne du fournisseur B, sachant qu'elle contient des traces de pesticides vaut environ 0,33.

Partie B

Un gérant de salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par le tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

« Acheter une boîte de thé et tester la présence de pesticides » est une épreuve de Bernoulli car il n'y a que 2 issues possibles : S et \bar{S} . On note \bar{S} l'événement : « La boîte achetée ne contient pas de traces de pesticides ». D'après la partie A, $P(\bar{S}) = 0,88$. On répète cette même épreuve 10 fois dans des conditions d'indépendances et cela devient un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X qui compte le nombre de boîtes sans trace de pesticides prend les valeurs entières de 0 à 10. Ainsi, elle suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,88)$.

2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} \times 0,88^{10} \times 0,12^0 = 0,88^{10} \approx 0,28$$

La probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides est d'environ 0,28.

Remarque : Pour obtenir ce résultat, sur CASIO, on tape BinomialPD (10 , 10 , 0.88)

3. Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) \approx 0,89$$

La probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides est d'environ 0,89.

Remarque : Pour obtenir ce résultat, sur CASIO, on tape 1 - BinomialCD (7 , 10 , 0.88)

Exercice 2 : Campagne publicitaire.

La directrice du marketing d'une grande entreprise doit concevoir une campagne publicitaire pour le lancement d'un nouveau produit sur le marché et s'interroge sur la durée de cette campagne. Une enquête a permis de modéliser la situation de la façon suivante :

- La probabilité qu'une personne connaisse le nouveau produit après n semaines de publicité est :

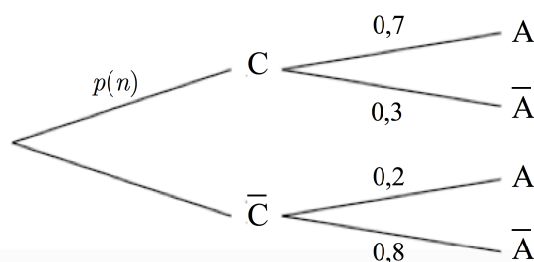
$$p(n) = \frac{5n}{6n + 30}$$

- Si une personne connaît le produit après n semaines, la probabilité qu'elle l'achète est 0,7.
- Si une personne ne connaît pas le produit après n semaines, la probabilité qu'elle l'achète est 0,2.

On interroge une personne au hasard après n semaines de publicité et on considère les événements suivants :

- C : « La personne connaît le produit »
- A : « La personne achète le produit »

Combien de jours de publicité la directrice du marketing doit-elle programmer pour que la probabilité de A soit supérieure à 0,5 ?



$$P(A) = P(C \cap A) + P(\bar{C} \cap A) = 0,7 \times p(n) + 0,2(1 - p(n))$$

$$\text{Or : } p(n) = \frac{5n}{6n + 30}$$

$$\text{Donc } P(A) = 0,7 \times \frac{5n}{6n + 30} + 0,2 \times \left(1 - \frac{5n}{6n + 30}\right) = \frac{3,5n}{6n + 30} + 0,2 \times \frac{6n + 30 - 5n}{6n + 30}$$

$$P(A) = \frac{3,5n}{6n + 30} + 0,2 \times \frac{n + 30}{6n + 30} = \frac{3,5n}{6n + 30} + \frac{0,2n + 6}{6n + 30} = \frac{3,7n + 6}{6n + 30}$$

La directrice du marketing souhaite que la probabilité de A soit supérieure à 0,5.

$$P(A) > 0,5 \Leftrightarrow \frac{3,7n + 6}{6n + 30} > 0,5$$

En multipliant chaque membre de l'inéquation par $6n + 30 > 0$ on en déduit successivement :

$$3,7n + 6 > 0,5(6n + 30)$$

$$3,7n + 6 > 3n + 15$$

$$3,7n - 3n > 15 - 6$$

$$0,7n > 9$$

$$n > \frac{9}{0,7} = \frac{90}{7}$$

n est le nombre de semaines de campagne publicitaire. On en déduit le nombre de jours : $\frac{90}{7} \times 7 = 90$

Ainsi, pour que la probabilité de A soit supérieure à 0,5 il faudra que la campagne publicitaire dure 90 jours.

Exercice 3 : Ecrire chacun des nombres complexes sous forme algébrique.

$$a = 2(1 - 3i) - (1 - i)$$

$$a = 2 - 6i - 1 + i$$

$$a = 1 - 5i$$

$$b = (1 + 2i)(3 - i)$$

$$b = 3 - i + 6i - 2i^2$$

$$b = 3 - i + 6i + 2$$

$$b = 5 + 5i$$

$$c = (\sqrt{2} - i\sqrt{3})(\sqrt{2} + i\sqrt{3})$$

$$c = (\sqrt{2})^2 - (i\sqrt{3})^2$$

$$c = 2 - 3i^2$$

$$c = 2 + 3 = 5$$

$$d = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$d = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}i + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$$

$$d = \frac{2}{4} - \frac{4}{4}i + \frac{2}{4}i^2$$

$$d = \frac{1}{2} - i - \frac{1}{2} = -i$$

$$e = \frac{-2i}{5+i}$$

$$e = \frac{-2i(5-i)}{(5+i)(5-i)}$$

$$e = \frac{-10i + 2i^2}{5^2 + 1^2}$$

$$e = \frac{-10i - 2}{25 + 1} = \frac{-2 - 10i}{26}$$

$$e = \frac{-1}{13} - \frac{5}{13}i$$

$$f = \frac{4+2i}{3-3i}$$

$$f = \frac{(4+2i)(3+3i)}{(3-3i)(3+3i)}$$

$$f = \frac{12 + 12i + 6i + 6i^2}{3^2 + 3^2}$$

$$f = \frac{12 + 12i + 6i - 6}{9 + 9}$$

$$f = \frac{6 + 18i}{18} = \frac{1}{3} + i$$

Exercice 4 : Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes et écrire les solutions sous forme algébrique.

a) $z^2 = -9$

$$z^2 = (3i)^2$$

$$z = 3i \text{ ou } z = -3i$$

b) $(z - 2 + i)(z - 5i) = 0$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Donc :

$$z - 2 + i = 0 \text{ ou } z - 5i = 0$$

$$z = 2 - i \text{ ou } z = 5i$$

c) $2iz + 1 = 8i$

$$2iz = -1 + 8i$$

$$z = \frac{-1 + 8i}{2i}$$

$$z = \frac{(-1 + 8i)(-2i)}{(2i)(-2i)}$$

$$z = \frac{2i - 16i^2}{4}$$

$$z = \frac{-4i^2 + 2i + 16}{4}$$

$$z = 4 + \frac{1}{2}i$$

d) $(1 + i)\bar{z} = 1 - 3\bar{z}$

$$(1 + i)\bar{z} + 3\bar{z} = 1$$

$$(1 + i + 3)\bar{z} = 1$$

$$(4 + i)\bar{z} = 1$$

$$\bar{z} = \frac{1}{4 + i}$$

$$\bar{z} = \frac{4 - i}{(4 + i)(4 - i)}$$

$$\bar{z} = \frac{4 - i}{4^2 + 1^2}$$

$$\bar{z} = \frac{4 - i}{17} = \frac{4}{17} - \frac{1}{17}i$$

On en déduit : $z = \frac{4}{17} + \frac{1}{17}i$