Nom :………………………………………. **DS n°5** **T.S.**
Prénom : ………………………………. **le 21.03.2019**

Capacités évaluées :	***Avis du professeur*** *Non* → *Oui*
Exercice 1 [Probabilités] :….. / 7 points	
Construire un arbre pondéré	
Calculer des probabilités	
Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire	
Exercice 2 [Nombres complexes] : ….. / 5 points	
Déterminer la mesure d'un angle orienté	
Déterminer un ensemble de points	
Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$	
Déterminer la nature d'un triangle	
Calculer	
Exercice 3 [Fonction exponentielle] : …… / 8 points	
Etudier les limites d'une fonction aux bornes de son ensemble de définition	
Dériver/Calculer/Retrouver un résultat donné	
Etudier les variations d'une fonction	
Démontrer qu'une équation admet une unique solution sur un intervalle donné	
Déterminer l'encadrement de la solution d'une équation, à une précision donnée.	
Résoudre une équation	
Justifier l'existence d'un extremum	

Exercice 1 : *Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.* **…… /7 pts**

Partie A :

Une société de location de voiture s'intéresse à l'état mécanique de son parc automobile afin d'anticiper les frais d'entretien. On dispose des données suivantes :

- 20% des voitures sont sous garantie ;
- Pour 1% des voitures sous garanties, une réparation est nécessaire ;
- Pour 10% des voitures qui ne sont plus sous garantie, une réparation est nécessaire.

On choisit une voiture au hasard dans le parc et on considère les évènements suivants : G : « la voiture est sous garantie » et R : « une réparation est nécessaire ».

1.
   a) Traduire la situation par un arbre pondéré.
   b) Calculer la probabilité que la voiture choisie soit sous garantie et nécessite une réparation.
   c) Justifier que $P(R) = 0{,}082$
   d) Il s'avère que la voiture choisie nécessite une réparation.
   Quelle est la probabilité qu'elle soit sous garantie ? *On arrondira le résultat à* 10^{-3}.

2. La société de location fait appel à un garage pour l'entretien de son parc automobile. L'entretien consiste en une révision à laquelle s'ajoutent d'éventuelles réparations. Les conditions commerciales du garage sont les suivantes :
   - Si la voiture est encore sous garantie, l'entretien est gratuit ;
   - Si la voiture n'est plus sous garantie, l'entretien est facturé de la manière suivante : la révision coûte 100€ et si une réparation est nécessaire, il faut ajouter 400€.

   Sachant que son parc automobile compte 2500 voitures, est-il raisonnable pour la société de location de prévoir un budget annuel de 250 000€ pour l'entretien de l'ensemble des voitures ?
   On pourra introduire une variable aléatoire X qui représente le coût d'entretien d'une voiture.

Partie B :

Soit Y la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de voitures nécessitant une réparation dans la société de location de 2500 véhicules.

1. On admet que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que 200 véhicules exactement aient besoin d'une réparation.
3. Calculer la probabilité que 200 véhicules au moins aient besoin d'une réparation.

Exercice 2 : …… /5 pts

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Pour les questions 1, 3 et 4 on se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u};\vec{v})$

1. Soient A, B et C les points d'affixes respectives : $a = 3$; $b = 3 - 3i\sqrt{3}$ et $c = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}$
   Affirmation 1 : $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

2. **Affirmation 2 :** $\frac{e^{\frac{i\pi}{2}}(6e^{i\pi}+2)}{2i} = -2$

3. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que : $|z - 1 + 2i| = 1\ \ et\ |z - 5 + i| = 3$
   Affirmation 3 : $\mathcal{E}$ est l'intersection non vide de deux cercles.

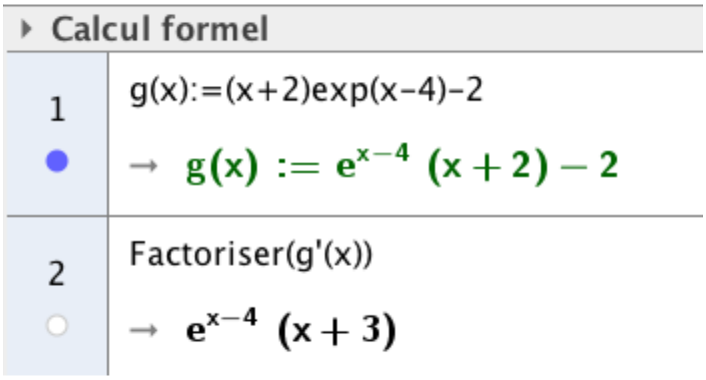
4. On considère l'équation : $(z + 1)(z^2 - 4z + 13) = 0$
   Affirmation 4 : Les solutions de l'équation sont les affixes des sommets d'un triangle isocèle non rectangle.

Exercice 3 : …… /8 pts

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x + 2)e^{x-4} - 2$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Démontrer que la limite de g en $-\infty$ vaut -2.
3. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a) Justifier l'expression de $g'(x)$ affichée dans la fenêtre du logiciel de calcul formel ci-dessous.



   b) Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
5. En déduire le tableau de signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
6. A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.

Partie B : Etude de la fonction *f*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - x^2e^{x-4}$$

1. Résoudre l'équation : $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   On admet par ailleurs que, pour tout réel x, $f'(x) = -xg(x)$ où la fonction g est celle définie à la partie A.
   Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que le maximum de la fonction f sur $[0; +\infty[$ est égal à $\frac{\alpha^3}{\alpha+2}$.

Exercice 1 : *Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.* …… **/7 pts**

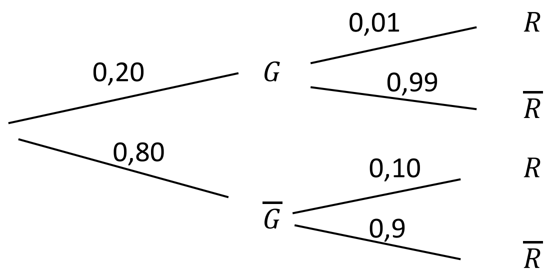
Partie A :

Une société de location de voiture s'intéresse à l'état mécanique de son parc automobile afin d'anticiper les frais d'entretien. On dispose des données suivantes :

- 20% des voitures sont sous garantie ;
- Pour 1% des voitures sous garanties, une réparation est nécessaire ;
- Pour 10% des voitures qui ne sont plus sous garantie, une réparation est nécessaire.

On choisit une voiture au hasard dans le parc et on considère les évènements suivants : G : « la voiture est sous garantie » et R : « une réparation est nécessaire ».

1.
   a) Traduire la situation par un arbre pondéré.



   b) Calculer la probabilité que la voiture choisie soit sous garantie et nécessite une réparation.

$P(G \cap R) = P(G) \times P_G(R) = 0{,}20 \times 0{,}01 = 0{,}002$

   c) Justifier que $P(R) = 0{,}082$

$P(R) = P(G \cap R) + P(\overline{G} \cap R) = P(G) \times P_G(R) + P(\overline{G}) \times P_{\overline{G}}(R) = 0{,}20 \times 0{,}01 + 0{,}80 \times 0{,}10 = 0{,}082$

   d) Il s'avère que la voiture choisie nécessite une réparation.
   Quelle est la probabilité qu'elle soit sous garantie ? *On arrondira le résultat à* 10^{-3}.

$P_R(G) = \frac{P(G \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}002}{0{,}082} \approx 0{,}024$

2. La société de location fait appel à un garage pour l'entretien de son parc automobile. L'entretien consiste en une révision à laquelle s'ajoutent d'éventuelles réparations. Les conditions commerciales du garage sont les suivantes :
   - Si la voiture est encore sous garantie, l'entretien est gratuit ;
   - Si la voiture n'est plus sous garantie, l'entretien est facturé de la manière suivante : la révision coûte 100€ et si une réparation est nécessaire, il faut ajouter 400€.

   Sachant que son parc automobile compte 2500 voitures, est-il raisonnable pour la société de location de prévoir un budget annuel de 250 000€ pour l'entretien de l'ensemble des voitures ?
   On pourra introduire une variable aléatoire X qui représente le coût d'entretien d'une voiture.

Soit X la variable aléatoire qui représente le coût d'entretien d'une voiture. X peut donc prendre les valeurs :

- 0 : dans le cas où la voiture est encore sous garantie, l'entretien est gratuit ;
- 100 : dans le cas où la voiture n'est plus sous garantie et qu'elle ne nécessite qu'un simple entretien.
- 500 : dans le cas où la voiture n'est plus sous garantie et qu'elle ne nécessite un entretien et une réparation

Les probabilités associées sont :

- $P(X = 0) = P(G) = 0{,}20$
- $P(X = 100) = P(\overline{G} \cap \overline{R}) = 0{,}8 \times 0{,}9 = 0{,}72$
- $P(X = 500) = P(\overline{G} \cap R) = 0{,}80 \times 0{,}10 = 0{,}08$

$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 100 \times P(X = 100) + 500 \times P(X = 500) = 112$

Le coût moyen de l'entretien d'une voiture est de 112€ . Ainsi pour un parc automobile de 2500 voitures, l'entretien coute en moyenne $2500 \times 112 = 280000 > 250000$

<u>Conclusion</u> : Un budget annuel de 250000€ pour l'entretien de l'ensemble des 2500 voitures sera insuffisant.

Partie B :

Soit Y la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de voitures nécessitant une réparation dans la société de location de 2500 véhicules.

1. On admet que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que 200 véhicules exactement aient besoin d'une réparation.
3. Calculer la probabilité que 200 véhicules au moins aient besoin d'une réparation.

1. Les paramètres de la loi binomiale sont : $n = 2500 \;\; et \; p = P(R) = 0{,}082$
2. $P(Y = 200) = \binom{2500}{200} \times 0{,}082^{200} \times (1 - 0{,}082)^{2500-200} \approx 0{,}027$
3. $P(Y \geq 200) = 1 - P(X < 200) = 1 - P(X \leq 199) \approx 0{,}653$

Exercice 2 : ...... /5 pts

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Pour les questions 1, 3 et 4 on se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

1. Soient A, B et C les points d'affixes respectives : $a = 3$; $b = 3 - 3i\sqrt{3}$ et $c = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}$
Affirmation 1 : $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

Forme algébrique : $c = 2e^{-\frac{i\pi}{3}} = 2\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$

$(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = \arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right) = \arg\left(\frac{3-(3-3i\sqrt{3})}{1-i\sqrt{3}-(3-3i\sqrt{3})}\right) = \arg\left(\frac{3i\sqrt{3}}{-2+2i\sqrt{3}}\right) = \arg\ (3i\sqrt{3}) - \arg(-2+2i\sqrt{3})[2\pi]$

Or $\arg(3i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ car $3i\sqrt{3} \in i\mathbb{R}^{+*}$

Et $\left|-2 + 2i\sqrt{3}\right| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$; $-2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(\frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 4\ \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

Donc $\arg(-2 + 2i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

<u>Conclusion</u> : $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$ **L'affirmation est donc fausse.**

2. **Affirmation 2 :** $\frac{e^{\frac{i\pi}{2}}(6e^{i\pi}+2)}{2i} = -2$

$$\frac{e^{\frac{i\pi}{2}}(6e^{i\pi} + 2)}{2i} = \frac{6e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)} + 2\,e^{i\frac{\pi}{2}}}{2i} = \frac{6e^{\frac{3i\pi}{2}} + 2e^{\frac{i\pi}{2}}}{2i} = \frac{6 \times (-i) + 2 \times i}{2i} = -2$$

L'affirmation est donc vraie.

3. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que : $|z - 1 + 2i| = 1 \;\; et \; |z - 5 + i| = 3$
Affirmation 3 : $\mathcal{E}$ est l'intersection non vide de deux cercles.

On note A et B les points d'affixes respectives $a = 1 - 2i \; et \; b = 5 - i$

$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \begin{cases} |z - 1 + 2i| = 1 \\ |z - 5 + i| = 3 \Leftrightarrow \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z - a| = 1 \\ |z - b| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MA = 1 \\ MB = 3 \end{cases} \Leftrightarrow M \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$

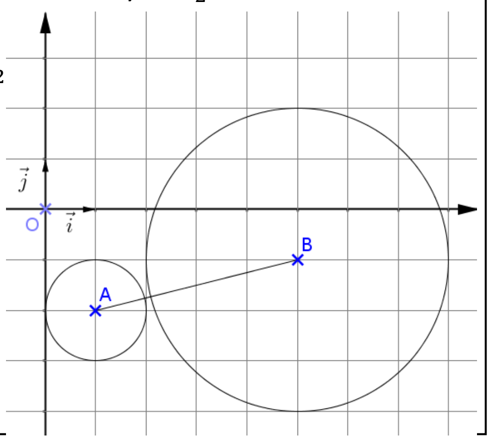
Où $\mathcal{C}_1$est le cercle de centre A et de rayon R_1 =1 et $\mathcal{C}_2$est le cercle de centre B et de rayon R_2 =3.

Or $AB = |b - a| = |5 - i - 1 + 2i| = |4 + i| = \sqrt{4^2 + 1} = \sqrt{17} > R_1 + R_2$

Les deux cercles $\mathcal{C}_1 et\ \mathcal{C}_2$ n'ont aucun point commun.

Donc $\mathcal{E}$ est un ensemble vide.

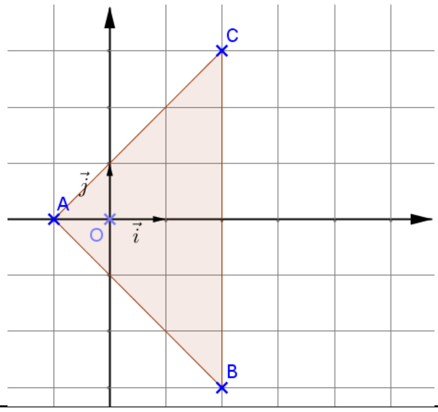
L'affirmation est donc fausse.



Affirmation 4 : Les solutions de l'équation sont les affixes des sommets d'un triangle isocèle non rectangle.

- Résolution : $(z+1)(z^2-4z+13)=0$
  Or un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul
  $z+1=0 \Leftrightarrow z=-1$
  $z^2-4z+13=0 \quad \Delta=(-4)^2-4\times1\times13=-36<0$
  L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\frac{4-i\sqrt{36}}{2}=2-3i$ *et* $z_2=2+3i$
  Donc : $S=\{-1\,;2-3i\,;2+3i\}$

- On note A, B et C les points d'affixes respectives : $a=-1\ ;b=2-3i$ *et* $c=2+3i$
  (<u>Conjecture graphique</u> : Le triangle ABC semble isocèle rectangle en A.)



$Z=\frac{b-a}{c-a}=\frac{2-3i+1}{2+3i+1}=\frac{3-3i}{3+3i}=\frac{(3-3i)^2}{(3+3i)(3-3i)}=\frac{9-18i-9}{18}=-i$

$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=\arg(Z)=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Et $|Z|=|-i|=1$ donc $\left|\frac{b-a}{c-a}\right|=1$ c'est-à-dire : $AB=AC$

<u>Conclusion</u> : le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.
L'affirmation est donc fausse.

<u>Exercice 3 :</u> **…… /8 pts**

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=(x+2)e^{x-4}-2$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x-4=+\infty$; On pose $X=x-4$ $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$ donc par composée : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-4}=+\infty$
D'autre part : $\lim\limits_{x\to+\infty} x+2=+\infty$
Donc par ***<u>produit</u>*** : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)e^{x-4}=+\infty$
<u>Conclusion</u> : : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

2. Démontrer que la limite de g en $-\infty$ vaut -2.

$g(x)=(x+2)e^{x-4}-2=(x+2)e^x\times e^{-4}-2=xe^xe^{-4}+2e^xe^{-4}-2$
$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ (Th des croissances comparées) donc $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^xe^{-4}=0$
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^xe^{-4}=0$
Donc par somme : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-2$

3. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a) Justifier l'expression de $g'(x)$ affichée dans la fenêtre du logiciel de calcul formel ci-dessous.

$\forall x\in\mathbb{R}:\ g(x)=(x+2)e^{x-4}-2=u(x)\times v(x)+k$ avec $\begin{cases} u(x)=x+2 & u'(x)=1 \\ v(x)=e^{x-4} & v'(x)=e^{x-4}\end{cases}$

$\forall x\in\mathbb{R}: g'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=e^{x-4}+(x+2)e^{x-4}=e^{x-4}(1+x+2)=e^{x-4}(x+3)$

   b) Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}: e^{x-4}>0$ donc $g'(x)$ est du signe de $x+3$.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations *de* g	-2	$\searrow$	$-e^{-7}-2$	$\nearrow$	$+\infty$

$x+3>0 \Leftrightarrow x>-3$

$f(-3)=(-3+2)e^{-3-4}-2=-e^{-7}-2$

4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

- g est continue (car g est dérivable sur $\mathbb{R}$) et strictement croissante sur $]-3; +\infty[$.
  Or $g(-3) < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
  Donc d'après le <u>*corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*</u>, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-3; +\infty[$
- A la lecture de son tableau de variation, g est strictement négative sur $]-\infty; -3[$.
  Donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution dans$]-\infty; -3[$.

<u>Conclusion</u> : $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

5. En déduire le tableau de signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

D'après le tableau de variations :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

6. A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.

- $f(3) < 0 \; et \; f(4) > 0 \;\; donc \; 3 < \alpha < 4$
- $f(3) < 0 \; et \; f(3{,}1) > 0 \;\; donc \; 3 < \alpha < 3{,}1$
- $f(3{,}06) < 0 \;\; et \; f(3{,}07) > 0 \;\; donc \; 3{,}06 < \alpha < 3{,}07$
- $f(3{,}069) < 0 \;\; et \; f(3{,}07) > 0 \; donc \; 3{,}069 < \alpha < 3{,}07$

Partie B : Etude de la fonction *f*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - x^2e^{x-4}$

1. Résoudre l'équation : $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(1 - e^{x-4}) = 0$
Or un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul
$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$1 - e^{x-4} = 0 \Leftrightarrow e^{x-4} = 1 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$
Donc $S = \{0; 4\}$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   On admet par ailleurs que, pour tout réel x, $f'(x) = -xg(x)$ où la fonction g est celle définie à la partie A.
   Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
Signe de $-x$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	

$-x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

3. Démontrer que le maximum de la fonction f sur $[0; +\infty[$ est égal à $\frac{\alpha^3}{\alpha+2}$.

f' s'annule de change de signe en $x = \alpha$ donc f admet un maximum local M en $x = \alpha$ sur $[0; +\infty[$.
$M = f(\alpha) = \alpha^2 - \alpha^2 e^{\alpha-4}$
Or on sait que $g(\alpha) = 0$ c'est-à-dire: $(\alpha + 2)e^{\alpha-4} - 2 = 0$ donc $e^{\alpha-4} = \frac{2}{\alpha+2}$
Donc $f(\alpha) = \alpha^2 - \alpha^2 \times \frac{2}{\alpha+2} = \frac{\alpha^2(\alpha+2)-2\alpha^2}{\alpha+2} = \frac{\alpha^3}{\alpha+2}$