TS Devoir surveillé n°5 (bis)

Exercice n°1 :

Les résultats seront arrondis à 10^{-4} près

Un ostréiculteur élève deux espèces d'huîtres : « la plate » et « la japonaise ». Chaque année, les huîtres plates représentent 15 % de sa production.

Les huîtres sont dites de calibre n° 3 lorsque leur masse est comprise entre 66 g et 85 g.

Seulement 10 % des huîtres plates sont de calibre n° 3, alors que 80 % des huîtres japonaises le sont.

1. Le service sanitaire prélève une huître au hasard dans la production de l'ostréiculteur. On suppose que toutes les huitres ont la même chance d'être choisies.

On considère les évènements suivants :

- J : « l'huître prélevée est une huître japonaise »,
- C : « l'huître prélevée est de calibre n° 3 ».

a. Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.

b. Calculer la probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n° 3.

c. Justifier que la probabilité d'obtenir une huître de calibre n° 3 est 0,695.

d. Le service sanitaire a prélevé une huître de calibre n° 3. Quelle est la probabilité que ce soit une huître plate ?

2. Le service sanitaire effectue un prélèvement de 20 huîtres dans l'ensemble de la production. On suppose que le choix des huîtres est indépendants les unes des autres.

Soit Y la variable aléatoire comptabilisant les huîtres de calibre 3 parmi les huîtres choisies.

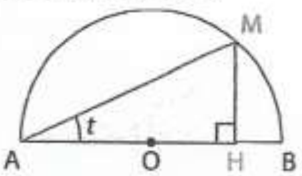
a) Justifier que Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

b) Calculer p(Y=3)

c) Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins 4 huîtres japonaises dans l'échantillon.

Exercice n°2 :

M appartient au demi-cercle de diamètre [AB], de centre O et rayon 1, H est son projeté orthogonal sur [AB]. On note t la mesure en radians de $\widehat{BAM}$, telle que $0 \leqslant t < \frac{\pi}{2}$.



1. Donner une mesure en radian de $\widehat{BOM}$.

2. En déduire que l'aire du triangle HAM est égale à $f(2t)$ où $f(x) = \frac{1}{2}(1+\cos x)\sin x$.

3. a. Montrer que $f'(x) = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)(1+\cos x)$.

b. Étudier le signe de $(1+\cos x)$ et de $\cos x - \frac{1}{2}$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

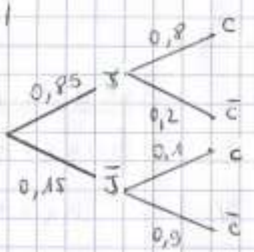
4. Est-il possible que l'aire du triangle HAM soit supérieure à 0,5 ? Si oui pour quels points M ?

TS

Corrigé DS n°5 (bis)

Exercice n°1 :

1] a/



b/ $p(\bar{J} \cap C) = p(\bar{J}) \times p_{\bar{J}}(C)$

$= 0,15 \times 0,1$

$= 0,015$

c/ $p(C) = p(C \cap J) + p(C \cap \bar{J})$

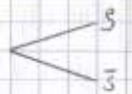
$= 0,85 \times 0,8 + 0,015$

$= 0,695$

d/ $p_C(\bar{J}) = \dfrac{P(\bar{J} \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,015}{0,695}$

$p_C(\bar{J}) \simeq 0,0216$

2] a] On considère l'expérience initiale à deux issues possibles



S : " lunettes de calibre n°3 "

$p = p(S) = 0,695$

Le choix des lunettes est indépendant les unes des autres et on choisit 20 lunettes, donc on considère que l'on renouvelle l'expérience initiale 20 fois de manière indépendante

Donc Y suit une loi binomiale de paramètres $\mathcal{B}(20 ; 0,695)$

b/ $p(Y=3) = \binom{20}{3} 0,695^3 \times 0,305^{17} \simeq 6,5457 \times 10^{-7}$

$p(Y=3) \simeq 0$

c/ Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de lunettes japonaises parmi les 20 lunettes de l'échantillon.

En justifiant comme dans le a/ on montre que X suit $\mathcal{B}(20 ; 0,85)$

$p(X \geq 4) = 1 - p(X \leq 3)$

$= 1 - 7,1045 \, E^{-12}$

$\simeq 1$

Exercice n°2

1 Dans le demi cercle de diamètre [AB]

l'angle inscrit $\widehat{BAM}$ et l'angle au centre $\widehat{BOM}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{BM}$

donc $\widehat{BOM} = 2\widehat{BAM}$ donc $\widehat{BOM} = 2t$ rad.

2. H est le projeté orthogonal du point M sur (AB) donc le triangle HAM est rectangle en H

donc l'aire du triangle HAM est égale à :

$\dfrac{HM \times AH}{2}$

Calcul de OH dans le triangle OHM rectangle en H.

$OM = 1 \qquad \widehat{HOM} = \widehat{BOM} = 2t$.

$\cos \widehat{HOM} = \dfrac{OH}{OM} \iff OH = OM \times \cos \widehat{HOM}$

$OH = 1 \times \cos 2t$

$OH = \cos 2t$

donc $AH = 1 + OH = 1 + \cos 2t$.

Calcul de HM dans le triangle OHM rectangle en H

$\sin \widehat{HOM} = \frac{HM}{OM} \iff HM = OM \sin(\widehat{HOM})$

$HM = 1 \times \sin(2t)$

donc l'aire du triangle HAM est égale

à $\frac{1}{2}(1+\cos 2t) \times \sin 2t = f(2t)$

3/ a] $f(x) = \frac{1}{2}(1+\cos x) \times \sin x$

$f'(x) = \frac{1}{2}\left[(-\sin x)\times \sin x + (1+\cos x)\cos x\right]$

$f'(x) = \frac{1}{2}\left[-\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x\right]$

or $\forall x \in \mathbb{R}$ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

donc $\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$

donc $f'(x) = \frac{1}{2}\left(\cos^2 x - 1 + \cos x + \cos^2 x\right)$

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(2\cos^2 x + \cos x - 1\right)$

$= \cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}$.

or $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)(1+\cos x) = \cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}$

donc $f'(x) = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)(1+\cos x)$

b/ $\forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ $0 < \cos x \leq 1$

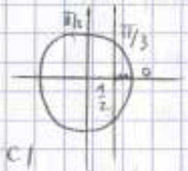
donc $1 < \cos x + 1 \leq 2$

donc $\cos x + 1 > 0$

• $\cos x - \frac{1}{2} = 0 \iff \cos x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3}$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$

$\cos x - \frac{1}{2} > 0 \iff \cos x > \frac{1}{2}$

donc $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{3}\right[$



c/

x	0	α		$\pi/3$		$\pi/2$
signe de $\cos x + 1$			$+$		$+$	
signe de $\cos x - \frac{1}{2}$			$+$	0	$-$	
signe de $f'(x)$			$+$	0	$-$	
Variation de f	0	$0{,}5$	$\nearrow$	$f(\pi/3)$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \simeq 0{,}65$

Fin de l'exercice :

donc $\alpha < x < \frac{\pi}{2}$

$\alpha < 2t < \frac{\pi}{2}$

$\frac{\alpha}{2} < t < \frac{\pi}{4}$

$0{,}29 < t < \frac{\pi}{4}$

$0{,}29 \simeq \frac{\pi}{11}$

donc si M est un point du cercle tel que $\widehat{BAM} \in \left]\frac{\pi}{11} ; \frac{\pi}{4}\right[$

alors l'aire est supérieure à 0,5

4/ Pour répondre au 4/ on utilise le tableau des variations.

Sur $\left]\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{2}\right[$ $f(x) > 0{,}5$

Sur $\left[0 ; \frac{\pi}{3}\right]$, • $0{,}5 \in \left[0 ; \frac{3\sqrt{3}}{8}\right]$

• f est continue et strictement croissante

donc l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet une solution unique α, donc

Sur $\left]\alpha ; \pi/2\right[$ $f(x) > 0{,}5$; d'après la calculatrice $\alpha \simeq 0{,}58$ ...