Nom : Classe : T ES	**Devoir surveillé n°6** le 08/04/2016	Note : … / 14

La notation du devoir prendra en compte les efforts de soin, de présentation et de rédaction.

Exercice 1 : *Adapté de l'exercice 1 du Baccalauréat ES Nouvelle Calédonie – mars 2016* **… / 3**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Chaque question ci-après comporte quatre propositions de réponse. Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. On ne demande pas de justification. Chaque réponse exacte rapportera 1 *point, une réponse fausse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point.*

Question 1

Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'inéquation

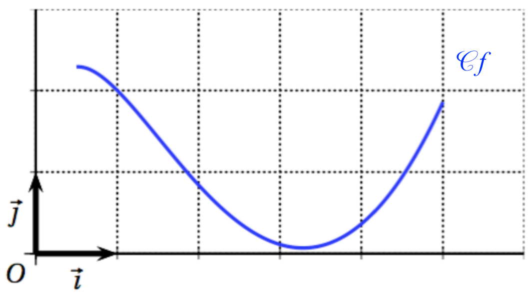
$$ln(x) + ln(3) \leq ln(2x + 1) \text{ est :}$$

a) [2 ; +∞[b)]0 ; 2] c)]-∞ ; 1] d)]0 ; 1]

Pour les questions 2 et 3 on considère la fonction f définie sur l'intervalle [0,5 ; 5] par :

$$f(x) = x^2 - 3xln(x) + 1$$

On a représenté ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}f$ de cette fonction dans un repère orthonormé :



Question 2

a) $f'(0,5) = 0$
b) $f(2) = 1$
c) La tangente à $\mathscr{C}f$ au point d'abscisse 1 a pour équation réduite $y = -x + 3$.
d) La tangente à $\mathscr{C}f$ au point d'abscisse 1 a pour équation réduite $y = -x + 2$.

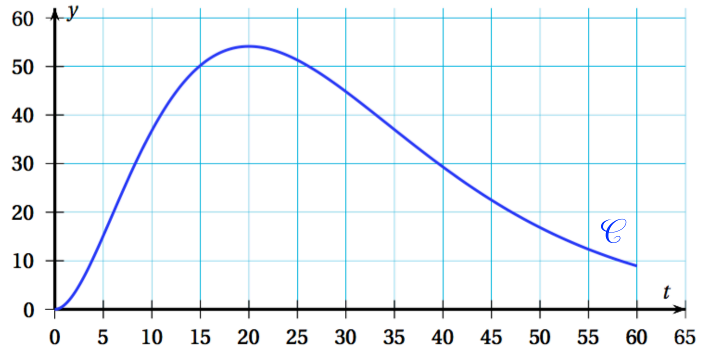
Question 3

On note I l'intégrale $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. On peut affirmer que :

a) $0,5 \leq I \leq 1$ b) $1 \leq I \leq 1,75$ c) $4 \leq I \leq 7$ d) $2 \leq I \leq 4$

Exercice 2 : *Adapté de l'exercice 4 du Baccalauréat ES Nouvelle Calédonie – mars 2016* **… / 11**

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente le nombre de personnes malades (en milliers) dans un pays lors d'une épidémie en fonction du nombre t de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie.



Partie A :

1) À l'aide du graphique, déterminer au bout de combien de jours le nombre de malades est maximal puis préciser le nombre approximatif de malades ce jour-là.

2) Estimer graphiquement le jour où la vitesse de propagation de la maladie est la plus forte. (Expliquer rapidement la démarche utilisée)

Partie B :

On modélise le nombre de malades (en milliers) en fonction du temps, à l'aide de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 60] par :

$$f(t) = t^2 e^{-0,1t}$$

où t représente le nombre de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie.

Pour étudier la fonction f, on a utilisé un logiciel de calcul formel qui a fourni les résultats suivants :

- $f'(t) = 0,1t(20 - t)e^{-0,1t}$
- $f''(t) = (0,01t^2 - 0,4t + 2)e^{-0,1t}$
- $F(t) = (-10t^2 - 200t - 2000)e^{-0,1t}$

où f' désigne la dérivée de f, f'' désigne sa dérivée seconde et F une primitive de f.

1) Démontrer le résultat : $f'(t) = 0,1t(20 - t)e^{-0,1t}$ qui a été fourni par le logiciel.

2) a) Déterminer le signe de $f'(t)$ sur [0 ; 60].

b) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur [0 ; 60].

3) a) Vérifier que F est une primitive de f.

b) Le nombre moyen de malades par jour, en milliers, durant les 60 premiers jours après l'apparition de la maladie est donné par $N = \frac{1}{60}\int_0^{60} f(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer la valeur exacte de N.

c) Quel est le nombre moyen de malades par jours, arrondi à la dizaine ?

4) a) Justifier par le calcul que sur l'intervalle [0 ; 15] la courbe représentative de la fonction f admet un unique point d'inflexion. Préciser une valeur arrondie à l'unité de l'abscisse de ce point d'inflexion.

b) Donner une interprétation concrète de cette abscisse.

Correction du DS n°6

Exercice 1 :

Question 1

Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'inéquation

$$ln(x) + ln(3) \leq ln(2x+1) \text{ est :}$$

a) [2 ; +∞[b)]0 ; 2] c)]-∞ ; 1] d)]0 ; 1]

Démonstration : $ln(x)$ est définie sur]0 ; +∞[et $ln(2x+1)$ est définie sur]-$\frac{1}{2}$; +∞[.
Donc l'inéquation est définie sur]0 ; +∞[.

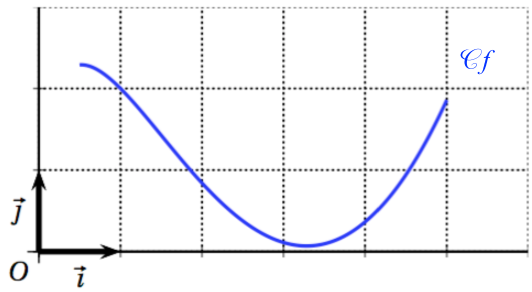
$ln(x) + ln(3) \leq ln(2x+1)$
$ln(3x) \leq ln(2x+1)$
$3x \leq 2x+1$
$x \leq 1$

Finalement S =]0 ; 1]

Pour les questions 2 et 3 on considère la fonction f définie sur l'intervalle [0,5 ; 5] par :

$$f(x) = x^2 - 3x ln(x) + 1$$

On a représenté ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}f$ de cette fonction dans un repère orthonormé :



Question 2

a) $f'(0,5) = 0$
b) $f(2) = 1$
c) La tangente à $\mathscr{C}f$ au point d'abscisse 1 a pour équation réduite y = -x + 3.
d) La tangente à $\mathscr{C}f$ au point d'abscisse 1 a pour équation réduite y = -x + 2.

Démonstration :

$\forall\ x \in [0,5 ; 5]$, $f(x) = x^2 - 3x ln(x) + 1 = x^2 - u(x)v(x) + 1$

$$f'(x) = 2x - (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) \text{ avec : } \begin{cases} u(x) = 3x \\ v(x) = \ln(x) \end{cases} \text{ et : } \begin{cases} u'(x) = 3 \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$f'(x) = 2x - 3ln(x) - 3x \times \frac{1}{x} = 2x - 3ln(x) - 3$$

$f(1) = 1^2 - 3ln(1) + 1 = 1 - 0 + 1 = 2$
$f'(1) = 2 - 3ln(1) - 3 = 2 - 0 - 3 = -1$
La tangente à $\mathscr{C}f$ au point d'abscisse 1 a pour équation réduite $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

y = -1$(x-1) + 2$

y = -$x + 1 + 2$

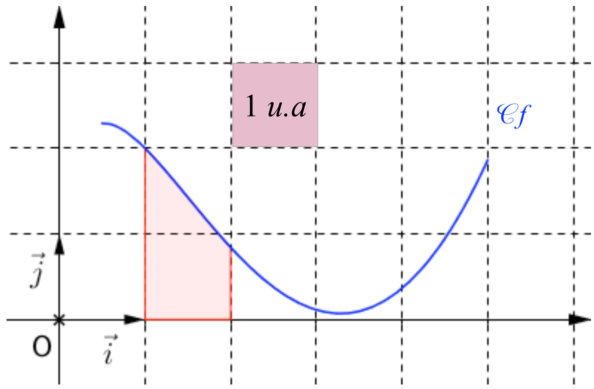
y = -$x + 3$

Question 3

On note I l'intégrale $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. On peut affirmer que :

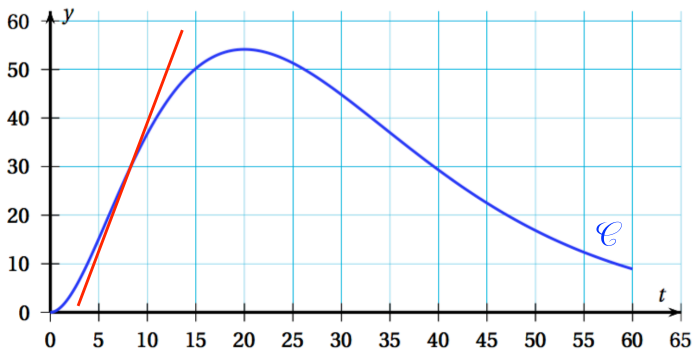
a) $0{,}5 \leq I \leq 1$ b) $1 \leq I \leq 1{,}75$ c) $4 \leq I \leq 7$ d) $2 \leq I \leq 4$

<u>Justification</u> : En coloriant le domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$ on observe que l'aire $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est comprise entre 1 et 2 unités d'aires.



<u>Exercice 2</u> :

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente le nombre de personnes malades (en milliers) dans un pays lors d'une épidémie en fonction du nombre t de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie.



<u>Partie A</u> :

1) Graphiquement, il semblerait que le nombre de malades soit maximal au bout de 20 jours. Ce jour là, environ 53 000 personnes sont malades.

2) Graphiquement, la maladie progresse très vite pendant environ 7 jours puis la progression ralentie jusqu'à diminuer à partir du 20ème jour. La tangente à la courbe en $x = 7$ semble traverser la courbe. Un point d'inflexion montre le ralentissement (ou l'accélération) de la propagation de la maladie. Ainsi, il semblerait que la progression de la maladie soit la plus forte le 7ème jour.

<u>Partie B</u> :

On modélise le nombre de malades (en milliers) en fonction du temps, à l'aide de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 60] par :

$$f(t) = t^2 e^{-0,1t}$$

où t représente le nombre de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie.

Pour étudier la fonction f, on a utilisé un logiciel de calcul formel qui a fourni les résultats suivants :

- $f'(t) = 0,1t(20 - t)e^{-0,1t}$
- $f''(t) = (0,01t^2 - 0,4t + 2)e^{-0,1t}$
- $F(t) = (-10t^2 - 200t - 2000)e^{-0,1t}$

où f' désigne la dérivée de f, f'' désigne sa dérivée seconde et F une primitive de f.

1) Démontrer le résultat : $f'(t) = 0,1t(20-t)e^{-0,1t}$ qui a été fourni par le logiciel.

$\forall\ t \in [0\ ;\ 60]$, $f(t) = t^2e^{-0,1t} = u(t)v(t)$

$f'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$ avec : $\begin{cases} u(t)=t^2 \\ v(t)=e^{-0,1t} \end{cases}$ et : $\begin{cases} u'(t)=2t \\ v'(t)=-0,1\,e^{-0,1t} \end{cases}$

$f'(t) = 2te^{-0,1t} + t^2(-0,1)e^{-0,1t} = 2te^{-0,1t} - 0,1t^2e^{-0,1t} = (2t-0,1t^2)e^{-0,1t} = 0,1t(20-t)e^{-0,1t}$

2) a) Déterminer le signe de $f'(t)$ sur [0 ; 60].

$\forall\ t \in [0\ ;\ 60]$, $f'(t) = 0,1t(20-t)e^{-0,1t}$
$\forall\ t \in [0\ ;\ 60]$, $0,1t \geq 0$ et $e^{-0,1t} \geq 0$.
Donc $f'(t)$ est du signe de $20-t$ sur [0 ; 60].
$20 - t > 0 \iff 20 > t \iff t < 20$
Donc $f'(t)$ est positive sur [0 ; 20] et strictement négative sur]20 ; 60].

b) Dresser le tableau de variations complet de la fonction *f* sur [0 ; 60].

t	0		20		60
$f'(t)$		+	0	−	
f	0	↗	$400e^{-2}$	↘	$3600e^{-6}$

$f(0) = 0^2e^{-0,1\times 0} = 0$

$f(20) = 20^2e^{-0,1\times 20} = 400e^{-2}$

$f(60) = 60^2e^{-0,1\times 60} = 3600e^{-6}$

3) a) Vérifier que F est une primitive de f.

F est une primitive de f si et seulement si $F' = f$.

$\forall\ t \in [0\ ;\ 60]$, $F(t) = (-10t^2 - 200t - 2000)e^{-0,1t} = u(t)v(t)$

$F'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$ avec : $\begin{cases} u(t)=-10t^2-200t-2\,000 \\ v(t)=e^{-0,1t} \end{cases}$ et : $\begin{cases} u'(t)=-20t-200 \\ v'(t)=-0,1\,e^{-0,1t} \end{cases}$

$F'(t) = (-20t-200)e^{-0,1t} + (-10t^2 - 200t - 2000)(-0,1)e^{-0,1t}$
$F'(t) = (-20t-200)e^{-0,1t} + (1t^2 + 20t + 200)e^{-0,1t}$
$F'(t) = (-20t - 200 + t^2 + 20t + 200)e^{-0,1t}$
$F'(t) = t^2e^{-0,1t} = f(t)$
Ainsi, F est bien une primitive de f.

b) Le nombre moyen de malades par jour, en milliers, durant les 60 premiers jours après l'apparition de la maladie est donné par $N = \frac{1}{60}\int_0^{60} f(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer la valeur exacte de N.

$N = \frac{1}{60}\int_0^{60} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{60}\,[F(60) - F(0)]$

$F(60) = (-10\times 60^2 - 200\times 60 - 2000)e^{-0,1\times 60} = -\,50000e^{-6} \approx -\,123,9376$
$F(0) = (-10\times 0^2 - 200\times 0 - 2000)e^{-0,1\times 0} = -\,2000e^{0} = -\,2000$
Donc : $N = \frac{1}{60}\,[-\,50000e^{-6} + 2000] = -\,\frac{2500}{3}\,e^{-6} + \frac{100}{3}$

c) Quel est le nombre moyen de malades par jours, arrondi à la dizaine ?

$N = -\,\frac{2500}{3}\,e^{-6} + \frac{100}{3} \approx 31,27$
On en déduit que le nombre moyen de malades par jours est d'environ 31 270.

4) a) Justifier par le calcul que sur l'intervalle [0 ; 15] la courbe représentative de la fonction *f* admet un unique point d'inflexion. Préciser une valeur arrondie à l'unité de l'abscisse de ce point d'inflexion.

$\forall\ t \in [0\ ;\ 60]$, $f''(t) = (0,01t^2 - 0,4t + 2)e^{-0,1t}$

$\forall\ t \in [0\ ;\ 60]$, $e^{-0,1t} \geq 0$.

Donc $f''(t)$ est du signe de $0,01t^2 - 0,4t + 2$ sur [0 ; 60]. On calcule le discriminant de ce trinôme.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-0,4)^2 - 4 \times 0,01 \times 2 = 0{,}16 - 0{,}08 = 0{,}08 > 0$

Le trinôme admet deux racines distinctes :

$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0{,}4-\sqrt{0{,}08}}{0{,}02} \approx 6$ et : $t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0{,}4+\sqrt{0{,}08}}{0{,}02} \approx 34$

Ainsi, la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion sur [0 ; 15]. Son abscisse est environ 6.

b) Donner une interprétation concrète de cette abscisse.

Puisque le point d'abscisse 6 (environ) est le point d'inflexion de $\mathscr{C}$ sur [0 ; 15] cela signifie que la progression de la maladie ralentie le 6$^{\text{ème}}$ jour, et non pas le 7$^{\text{ème}}$ comme on aurait pu le lire graphiquement.