Nom :
Classe : T S

DS n°6
le 23/03/2017

Note :
… / 20

	Avis de l'élève		Avis du professeur	
Connaissances / Compétences évaluées	***Oui***	***Non***	***Oui***	***Non***
Calculer avec des nombres complexes.				
Déterminer la nature d'un triangle en utilisant les propriétés des nombres complexes.				
Déterminer / Tracer des ensembles de points.				
Déterminer une fonction à partir d'observations graphiques.				
Déterminer des limites.				
Dériver.				
Etudier les variations d'une fonction. Déterminer les extremums locaux.				
Résoudre un problème en « prise d'initiatives ».				

Exercice 1 : **… / 8**

Partie A : Dans le plan complexe, on donne les points $\mathrm{A}(-4+2i)$, $\mathrm{B}(-i)$ et $\mathrm{C}(3+3i)$ et on pose :

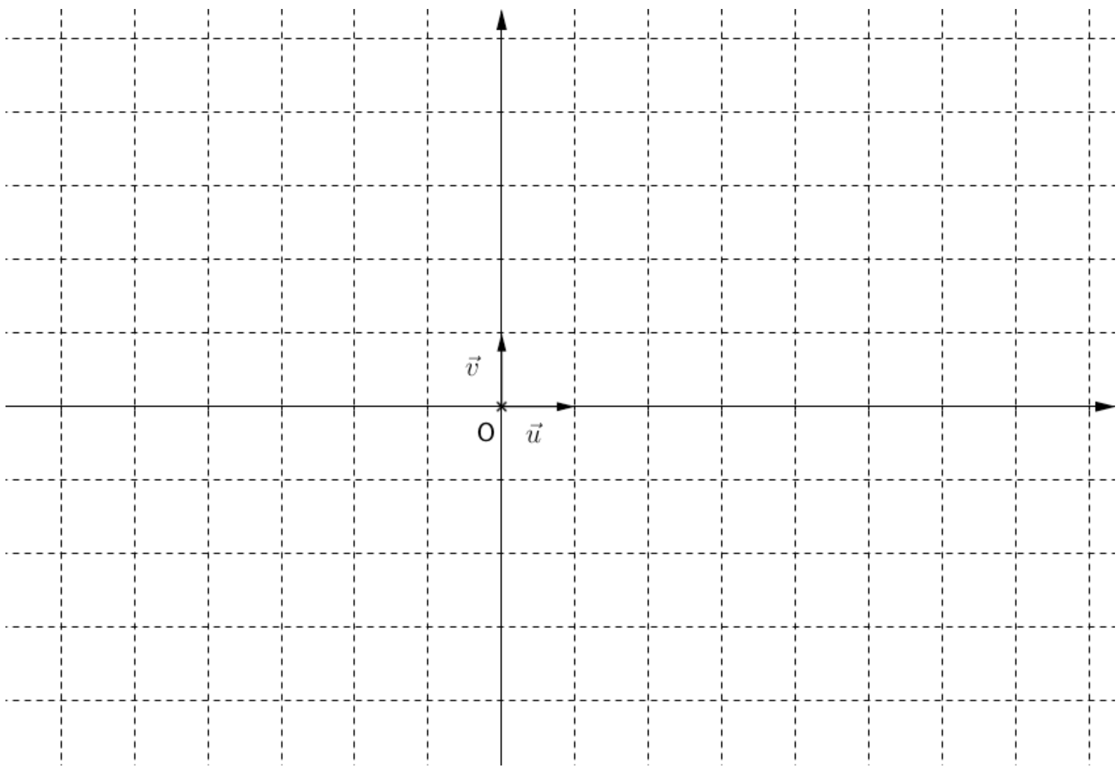
$$Z=\frac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{B}}}$$

1. Déterminer la forme algébrique de Z. En déduire sa forme exponentielle.
2. Déterminer la nature du triangle ABC.

Partie B : Dans le plan complexe, à tout point M d'affixe $z\neq 2-i$ on associe le point M' d'affixe Z tel que :

$$Z=\frac{z+2-3i}{z-2+i}$$

1. Déterminer, en utilisant un argument de Z, l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M tels que Z soit réel.
2. Déterminer, en utilisant la forme algébrique de Z, l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M tels que Z soit un imaginaire pur.
3. Tracer $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ ci-dessous.



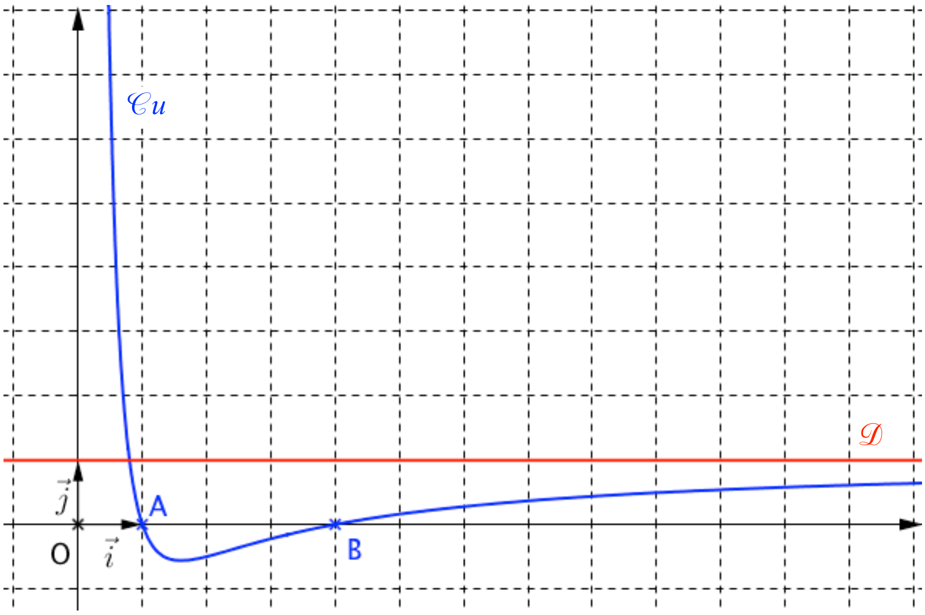
Exercice 2 : **… / 9**

Partie A :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ on désigne par $\mathscr{C}_u$ la courbe représentative de la fonction u définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

où a, b et c sont trois réels à déterminer.
On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_u$ ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$.



On précise que la courbe $\mathscr{C}_u$ passe par les points $A(1;0)$ et $B(4;0)$ et que l'axe des ordonnées et la droite $\mathscr{D}$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_u$.

1. Donner, en justifiant, les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.
2. Donner, en justifiant, la valeur de $\lim_{x\to+\infty} u(x)$. En déduire la valeur de a.
3. En déduire que, pour tout réel x de $]0;+\infty[$: $u(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2}$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 5ln(x) - \frac{4}{x}.$$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. a) Démontrer que, pour tout réel x de $]0;+\infty[$: $f'(x) = u(x)$.

   b) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$ en précisant les limites et les valeurs exactes des extremums locaux.

Exercice 3 : Température du thé. **… / 3**

Dans une pièce à température constante de 20 °C, Gaspard se prépare une tasse de thé.
A l'instant initial $t = 0$, la température de son thé est de 100 °C. Quatre minutes plus tard, elle est de 80 °C.
On admet que la température du thé $\theta(t)$, en °C, est donnée par :

$$\theta(t) = Ce^{at} + 20$$

où t désigne le temps en minutes et C et a sont des constantes réelles.
Au dessus de 50 °C, Gaspard trouve que le thé est trop chaud et ne peut pas le boire.
Combien de temps devra-t-il attendre pour déguster son thé ?

Correction du DS n°6

Exercice 1 :

Partie A : Dans le plan complexe, on donne les points $A(-4+2i)$, $B(-i)$ et $C(3+3i)$ et on pose :

$$Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$$

1. Déterminer la forme algébrique de Z. En déduire sa forme exponentielle.

$Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{3+3i+i}{-4+2i+i} = \frac{3+4i}{-4+3i} = \frac{(3+4i)(-4-3i)}{(-4+3i)(-4-3i)} = \frac{-3\times4-4\times3i^2+i(-3\times3-4\times4)}{(-4)^2+3^2}$

$Z = \frac{-12+12-25i}{25} = -i$

On a : $|Z| = |-i| = 1$ et : $\text{Arg}(Z) = \text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ Donc : $Z = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Attention ! Eviter d'écrire $e^{i-\frac{\pi}{2}}$ ou $e^{-\pi/2i}$ qui peut sous-entendre $e^{-\frac{\pi}{2i}}$.

2. Déterminer la nature du triangle ABC.

- $|Z| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z_{\overrightarrow{BC}}}{z_{\overrightarrow{BA}}}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{BC}{BA} = 1 \Leftrightarrow BC = BA$

  On en déduit que le triangle ABC est isocèle en B.

- $\text{Arg}(Z) = -\frac{\pi}{2}\,[2\pi] \Leftrightarrow \text{Arg}\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = -\frac{\pi}{2}\,[2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

  On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux et que le triangle ABC est rectangle en B.

Partie B : Dans le plan complexe, à tout point M d'affixe $z \neq 2-i$ on associe le point M' d'affixe Z tel que :

$$Z = \frac{z+2-3i}{z-2+i}$$

1. Déterminer, en utilisant un argument de Z, l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que Z soit réel.

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = -2+3i$ et $z_B = 2-i$

$M(z) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Arg}(Z) = 0\,[\pi] \Leftrightarrow \text{Arg}\left(\frac{z+2-3i}{z-2+i}\right) = 0\,[\pi]$ et $z \neq 2-i$

$M(z) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \text{Arg}\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = 0\,[\pi]$ et $z \neq z_B$

$M(z) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow (\overrightarrow{BM}\,;\,\overrightarrow{AM}) = 0\,[\pi]$ et $M \neq B$

$M(z) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow M \in (AB)$ et $M \neq B$

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{E}$ est la droite (AB) privée du point B d'affixe $z_B = 2-i$.

2. Déterminer, en utilisant la forme algébrique de Z, l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M tels que Z soit un imaginaire pur.

On pose $Z = x+iy$, où x et y sont deux réels.

$Z = \frac{z+2-3i}{z-2+i} = \frac{x+iy+2-3i}{x+iy-2+i} = \frac{(x+2)+i(y-3)}{(x-2)+i(y+1)} = \frac{[(x+2)+i(y-3)][(x-2)-i(y+1)]}{[(x-2)+i(y+1)][(x-2)-i(y+1)]}$

$Z = \frac{(x+2)(x-2)-i^2(y-3)(y+1)+i[(x+2)(-y-1)+(y-3)(x-2)]}{(x-2)^2+(y+1)^2}$

$Z = \frac{(x^2-4+y^2-2y-3)+i(-xy-x-2y-2+xy-2y-3x+6)}{(x-2)^2+(y+1)^2}$

$Z = \frac{(x^2+y^2-2y-7)+i(-4x-4y+4)}{(x-2)^2+(y+1)^2}$

$M(z) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2-2y-7}{(x-2)^2+(y+1)^2} = 0$ et $(x;y) \neq (2;-1)$

$M(z) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow x^2+y^2-2y-7 = 0$ et $z \neq z_B$

$M(z) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (x-0)^2+(y-1)^2-1-7 = 0$ et $z \neq z_B$

$M(z) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (x-0)^2+(y-1)^2 = 8$ et $M \neq B$

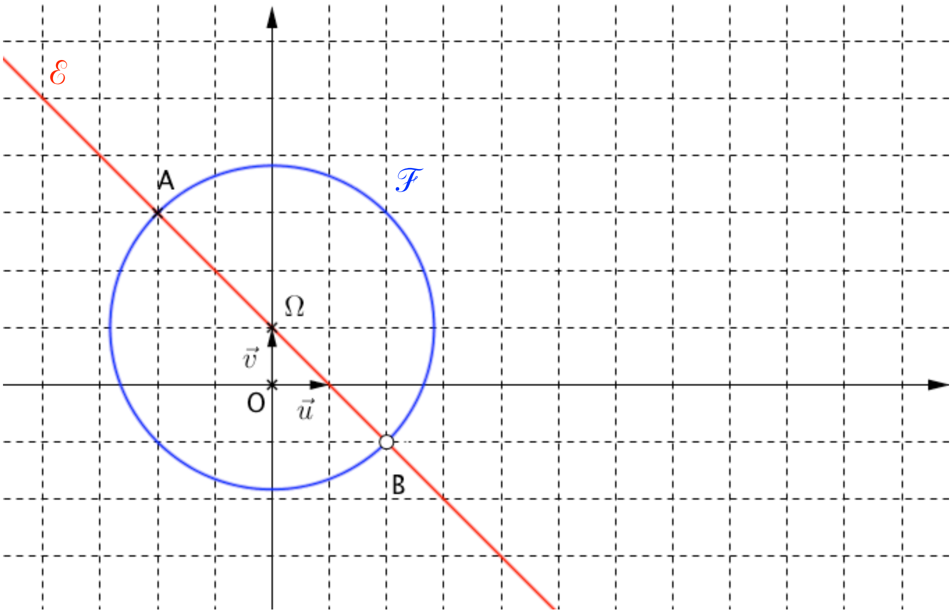
$(x-0)^2+(y-1)^2 = 8$ est l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(0;1)$ et de rayon $r=\sqrt{8}$.

Vérifions si B appartient au cercle $\mathcal{C}$:

$(2-0)^2+(-1-1)^2 = (2)^2+(-2)^2 = 4+4 = 8$ Donc $B \in \mathcal{C}$.

Finalement, l'ensemble $\mathcal{F}$ est le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(0;1)$ et de rayon $r=\sqrt{8}$, privé du point B.

3. Tracer $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ ci-dessous.



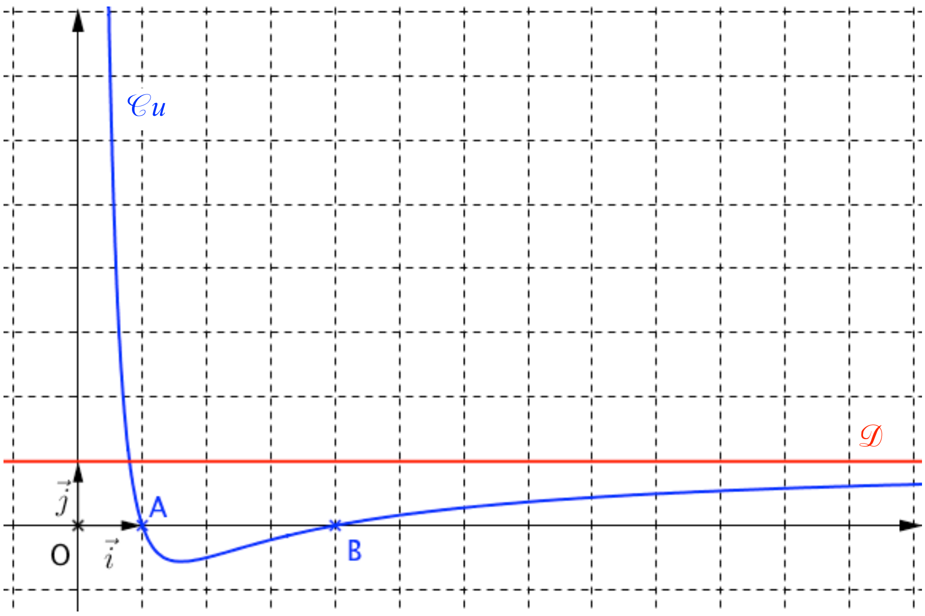
Exercice 2 :

Partie A :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on désigne par $\mathscr{C}_u$ la courbe représentative de la fonction u définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

où a, b et c sont trois réels à déterminer.
On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_u$ ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$.



On précise que la courbe $\mathscr{C}_u$ passe par les points $A(1;0)$ et $B(4;0)$ et que l'axe des ordonnées et la droite $\mathscr{D}$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_u$.

1. Donner, en justifiant, les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.
   On sait que : $A(1;0) \in \mathscr{C}_u$ et $B(4;0) \in \mathscr{C}_u$
   On en déduit : $u(1) = u(4) = 0$

2. Donner, en justifiant, la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$. En déduire la valeur de a.
   La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_u$ en $+\infty$.
   On en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 1$
   Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{b}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{c}{x^2} = 0$. Donc, par somme de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = a = 1$

3. En déduire que, pour tout réel x de $]0;+\infty[$: $u(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2}$.

La fonction u est définie sur $]0;+\infty[$ par : $u(x) = 1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$

Or : $u(1) = u(4) = 0$

On en déduit que a et b sont solutions du système :

(S) : $\begin{cases} 1+b+c=0 \\ 1+\frac{b}{4}+\frac{c}{16}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+b+c=0 \\ 16+4b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\text{-}1-b \\ 16+4b-1-b=0 \end{cases}$

(S) : $\begin{cases} c=\text{-}1-b \\ 3b=\text{-}15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\text{-}1-b \\ b=\text{-}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\text{-}5 \\ c=\text{-}1+5=4 \end{cases}$

Finalement : $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $u(x) = 1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-5x+4}{x^2}$

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 5ln(x) - \frac{4}{x}.$$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

$f(x) = x - 5ln(x) - \frac{4}{x} = \frac{1}{x}\,(x^2 - 5x\,ln(x) - 4)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\,ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0$ donc, par produit et sommes : $\lim\limits_{x\to 0^+} [x^2 - 5x\,ln(x) - 4] = \text{-}4$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

On en déduit, par produit de limites : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \text{-}\infty$

2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

$f(x) = x - 5ln(x) - \frac{4}{x} = x\,(1 - 5\,\frac{ln(x)}{x} - \frac{4}{x^2})$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4}{x^2} = 0$ donc, par produit et sommes : $\lim\limits_{x\to 0^+} [1 - 5\,\frac{ln(x)}{x} - \frac{4}{x^2}] = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$

On en déduit, par produit de limites : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

3. a) Démontrer que, pour tout réel x de $]0;+\infty[$: $f'(x) = u(x)$.

$\forall\, x \in]0;+\infty[$, $f(x) = x - 5ln(x) - \frac{4}{x} = x - 5 \times ln(x) - 4 \times \frac{1}{x}$

Donc : $f'(x) = 1 - 5 \times \frac{1}{x} - 4 \times \frac{\text{-}1}{x^2} = 1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-5x+4}{x^2} = u(x)$

b) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$ en précisant les limites et les valeurs exactes des extremums locaux.

$\forall\, x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2}$ et $x^2 > 0$

On en déduit que $f'(x)$ a le même signe que $x^2 - 5x + 4$ sur $]0;+\infty[$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (\text{-}5)^2 - 4 \times 4 = 25 - 16 = 9 > 0$

On en déduit deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{\text{-}b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-3}{2} = 1$ et : $x_2 = \frac{\text{-}b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+3}{2} = 4$

Le trinôme est du signe de $a = 1$, c'est-à-dire positif, à l'extérieur des racines.

Enfin :

$f(1) = 1 - 5ln(1) - \frac{4}{1} = 1 - 4 = \text{-}3$ et : $f(4) = 4 - 5ln(4) - \frac{4}{4} = 3 - 5ln(4)$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$	||	+	0	−	0	+	
$f(x)$	|| $\text{-}\infty$	↗	$\text{-}3$	↘	$3-5ln(4)$	↗	$+\infty$

Exercice 3 : Température du thé.

Dans une pièce à température constante de 20 °C, Gaspard se prépare une tasse de thé.
A l'instant initial $t = 0$, la température de son thé est de 100 °C. Quatre minutes plus tard, elle est de 80 °C.
On admet que la température du thé $\theta(t)$, en °C, est donnée par :

$$\theta(t) = Ce^{at} + 20$$

où t désigne le temps en minutes et C et a sont des constantes réelles.
Au dessus de 50 °C, Gaspard trouve que le thé est trop chaud et ne peut pas le boire.
Combien de temps devra-t-il attendre pour déguster son thé ?

On commence par chercher les valeurs des constantes C et a :

- A l'instant initial $t = 0$, la température du thé est de 100 °C. Donc :
  $\theta(0) = 100 \;\Leftrightarrow\; Ce^0 + 20 = 100 \;\Leftrightarrow\; C + 20 = 100 \;\Leftrightarrow\; C = 80$

- Quatre minutes plus tard, elle est de 80 °C. Donc :
  $\theta(4) = 80 \;\Leftrightarrow\; 80e^{4a} + 20 = 80 \;\Leftrightarrow\; 80e^{4a} = 60 \;\Leftrightarrow\; e^{4a} = \frac{3}{4} \;\Leftrightarrow\; 4a = ln(0,75) \;\Leftrightarrow\; a = \frac{1}{4}ln(0,75)$

Ainsi : $\theta(t) = 80e^{\frac{1}{4}ln(0,75)t} + 20$
On cherche combien de temps devra attendre Gaspard avant que la température du thé soit inférieure ou égale à 50 °C.

$\theta(t) \leq 50$
$80e^{\frac{1}{4}ln(0,75)t} + 20 \leq 50$
$80e^{\frac{1}{4}ln(0,75)t} \leq 30$
$e^{\frac{1}{4}ln(0,75)t} \leq \frac{3}{8}$
$\frac{1}{4}\,ln(0,75)t \leq ln(0,375)$
$ln(0,75)t \leq 4\,ln(0,375)$
Or : $0 < 0,75 < 1$ donc : $ln(0,75) < 0$ On en déduit :
$t \geq 4\,\frac{ln(0,375)}{ln(0,75)} \approx 13,64$

Ainsi, Gaspard devra attendre au moins 13,7 minutes avant de pouvoir déguster son thé.

Remarque : On arrondit par excès pour que la température du thé passe en dessous de 50 °C.