<u>Nom</u> : **DS n°6** <u>Note</u> :
Prénom : TS 5 le 10/04/2019 … / 20

Je sais :	Evaluation des capacités Non Oui
Déterminer les solutions d'une équation dépendant de la fonction logarithme néperien.	
Déterminer des limites.	
Dériver.	
Justifier qu'une équation admet une unique solution sur un intervalle donné.	
Déterminer un maximum.	
Déterminer la valeur d'un paramètre pour qu'une contrainte soit respectée.	
Déterminer un angle.	
Construire le point d'intersection d'un plan et d'une droite.	
Justifier l'intersection de deux plans.	
Donner les coordonnées d'un point dans un repère orthonormé.	
Déterminer les coordonnées d'un vecteur pour qu'il soit orthogonal à deux autres.	
Justifier l'équation cartésienne d'un plan.	
Donner la représentation paramétrique d'une droite.	
Calculer les coordonnées du point d'intersection d'une droite et d'un plan.	
Construire la section d'un cube par un plan.	
Déterminer si un point est à l'intérieur d'un cube	

Les exercices seront traités dans l'ordre de votre choix. La présentation et le soin apportés à la présentation de votre copie rentreront pour une part importante dans sa notation.

<u>Exercice 1</u> : Vrai / Faux. **… / 7,5**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.
Une bonne réponse, convenablement justifiée, rapporte 1, 5 point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère l'équation :
$$ln(6x-2)+ln(2x-1)=ln(x)$$
<u>Affirmation 1</u> : L'équation admet deux solutions.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=ln(\frac{e^2}{f(x)})$ où f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$2e$	↘	3

<u>Affirmation 2</u> : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$

<u>Affirmation 3</u> : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{e^2}$

3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=ln(1+3\,e^x)-e^x$.
On admet que le tableau de variation de h est le suivant :

x	$-\infty$		$ln(\frac{2}{3})$		$+\infty$
$h(x)$	0	↗	$ln(3)-\frac{2}{3}$	↘	$-\infty$

<u>Affirmation 4</u> : La fonction dérivée de h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h'(x)=\frac{(2-3\,e^x)\,e^x}{1+3\,e^x}$

<u>Affirmation 5</u> : L'équation $h(x)=-1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : **… / 5**

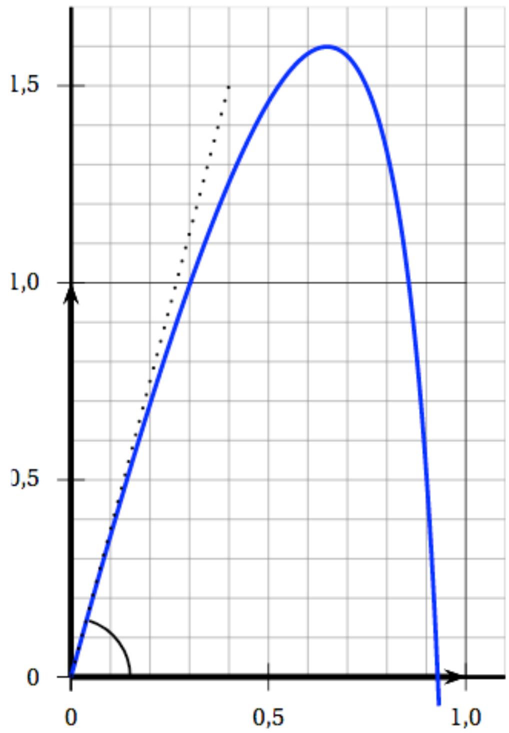
Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètre.

Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.

On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1[$ par :

$$f(x) = b\,x + 2\,ln(1 - x)$$

où b est un paramètre réel supérieur à 2, x est l'abscisse du projectile et $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.



1. La fonction f est dérivable sur $[0\,;1[$. On note f' sa fonction dérivée. On admet que la fonction f possède un maximum sur $[0\,;1[$ et que pour tout réel x de cet intervalle :

   $$f'(x) = \frac{-b\,x+b-2}{1-x}$$

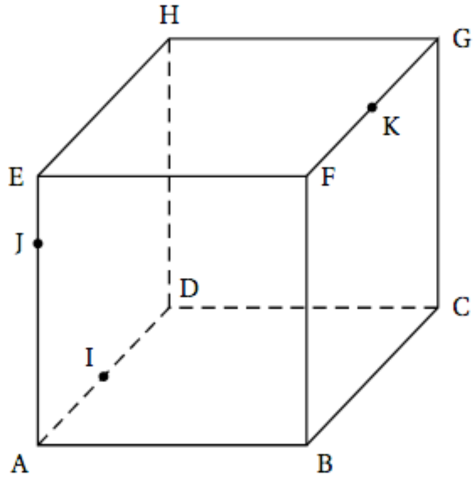
   Montrer que le maximum de f est égal à $b - 2 + 2\,ln(\frac{2}{b})$.

2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile de dépasse pas $1,6$.

3. Dans cette question, on choisit $b = 5,69$.
   L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus.
   Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ.

Exercice 3 : **… / 7,5**

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH.



Les trois points I, J et K sont définis par les conditions suivantes :

- I est le milieu du segment [AD]
- J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$
- K est le milieu du segment [FG]

Partie A :

1. Sur la figure donnée en annexe, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH). On laissera les traits de construction sur la figure.
2. En déduire, en justifiant, l'intersection des plans (IJK) et (EFG).

Partie B :

On se place désormais dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. a) Donner, sans justification, les coordonnées des points I, J et K.

   b) Déterminer les réels a et b tels que le vecteur $\vec{n}\,(4\ ;\ a\ ;\ b)$ soit orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

   c) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est $4x - 6y - 4z + 3 = 0$.
2. a) Donner une représentation paramétrique de la droite (CG).

   b) Calculer les coordonnées du point N, intersection du plan (IJK) et de la droite (CG).

   c) Placer le point N sur la figure et construire en couleur la section du cube par le plan (IJK).

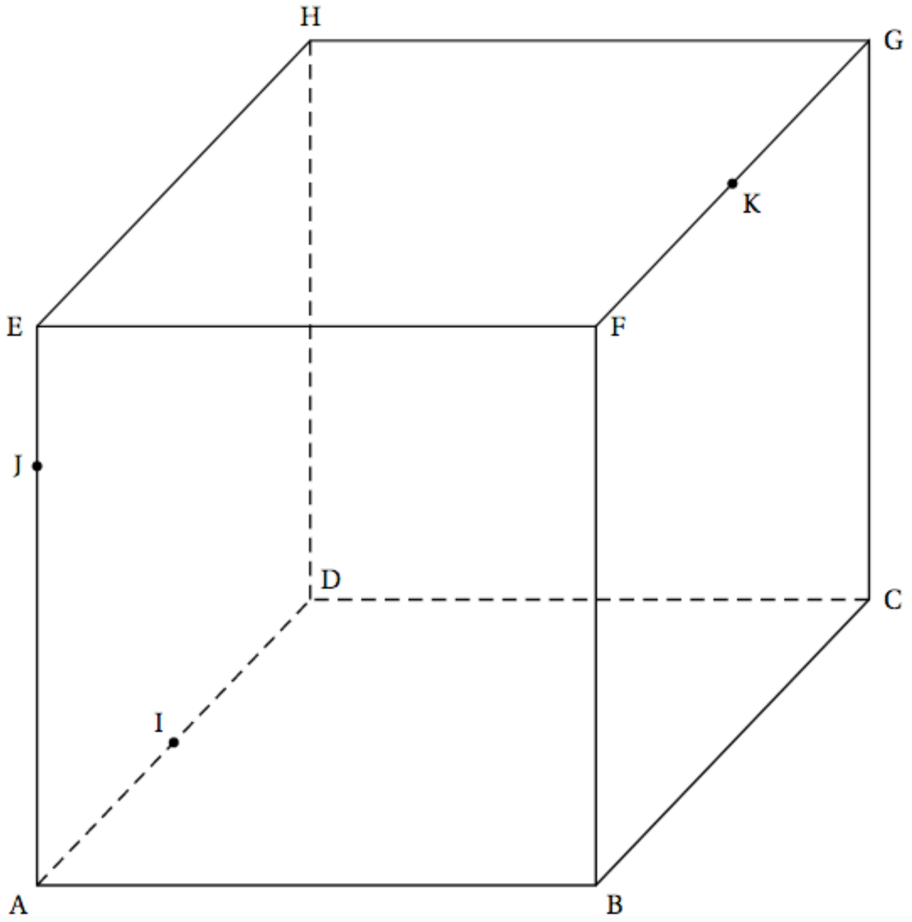
Partie C :

On note R le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK). Le point R est donc l'unique point du plan (IJK) tel que la droite (FR) est orthogonale au plan (IJK).

On définit l'intérieur du cube comme l'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1. \\ 0 < z < 1 \end{cases}$

Le point R est-il à l'intérieur du cube ?

Annexe (à rendre avec la copie)



Correction du DS n°6

Exercice 1 : Vrai ou Faux ? Justifier.

1. On considère l'équation :

$$ln(6x-2)+ln(2x-1)=ln(x)$$

Affirmation 1 : L'équation admet deux solutions.

- On commence par déterminer l'ensemble de définition de l'équation :

$ln(6x-2)$ n'est défini que si et seulement si : $6x-2>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$

$ln(2x-1)$ n'est défini que si et seulement si : $2x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$

$ln(x)$ n'est défini que si et seulement si $x>0$

$(x>0)$ et $(x>\frac{1}{3})$ et $(x>\frac{1}{2}) \Leftrightarrow (x>\frac{1}{2})$ donc l'équation est définie sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$.

- Résolution de l'équation :

$ln(6x-2)+ln(2x-1)=ln(x) \Leftrightarrow ln[(6x-2)(2x-1)]=ln(x)$

Donc : $ln(12x^2-6x-4x+2)=ln(x)$

Donc : $ln(12x^2-10x+2)=ln(x)$

Donc : $12x^2-10x+2=x$

Donc : $12x^2-11x+2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-11)^2-4\times 12\times 2=121-96=25>0$

On en déduit deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{11-5}{24}=\frac{1}{4}$ et : $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{11+5}{24}=\frac{2}{3}$

$x_1\notin]\frac{1}{2} ; +\infty[$ mais $x_2\in]\frac{1}{2} ; +\infty[$.

Ainsi, l'équation de départ : $ln(6x-2)+ln(2x-1)=ln(x)$ n'admet qu'une seule solution : $x_2=\frac{2}{3}$

L'affirmation 1 est fausse.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=ln(\frac{e^2}{f(x)})$ où f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1 ↗	$2e$ ↘	3

Affirmation 2 : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$

$e^2>0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

On en déduit, par quotient de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^2}{f(x)}=0^+$

Or, $\lim\limits_{X\to 0^+} ln(X)=-\infty$ Donc, par composée de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} ln(\frac{e^2}{f(x)})=-\infty$

L'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3 : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{e^2}$

$\forall\, x\in\mathbb{R}, \frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{f(x)}\times g(x)=\frac{1}{f(x)}\times g(x)=\frac{1}{f(x)}\times ln(\frac{e^2}{f(x)})=\frac{1}{e^2}\times\frac{e^2}{f(x)}\times ln(\frac{e^2}{f(x)})$

On a déjà justifié que : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^2}{f(x)}=0^+$

Or, $\lim\limits_{X\to 0^+} X\,ln(X)=0$ Donc, par composée de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^2}{f(x)}\times ln(\frac{e^2}{f(x)})=0$

Par produit de limites, on en déduit : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^2}\times\frac{e^2}{f(x)}\times ln(\frac{e^2}{f(x)})=0$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=0$. **L'affirmation 3 est fausse.**

3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = ln(1+3\,e^x) - e^x$.
On admet que le tableau de variation de h est le suivant :

x	$-\infty$		$ln(\frac{2}{3})$		$+\infty$
$h(x)$	0	$\nearrow$	$ln(3)-\frac{2}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Affirmation 4 : La fonction dérivée de h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h'(x) = \frac{(2-3\,e^x)\,e^x}{1+3\,e^x}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $h(x) = ln(1+3\,e^x) - e^x = ln(u(x)) - e^x$

$$h'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} - e^x = \frac{3\,e^x}{1+3\,e^x} - e^x = \frac{3\,e^x-(1+3\,e^x)\,e^x}{1+3\,e^x} = \frac{3\,e^x-e^x-3\,(e^x)^2}{1+3\,e^x} = \frac{2\,e^x-3\,(e^x)^2}{1+3\,e^x} = \frac{(2-3\,e^x)\,e^x}{1+3\,e^x}$$

L'affirmation 4 est vraie.

Affirmation 5 : L'équation $h(x) = -1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

A la lecture du tableau de variations de h, on sait que cette fonction est strictement positive sur $]-\infty\,;\,ln(\frac{2}{3})[$.
Ainsi, $h(x) = -1$ n'admet aucune solution sur $]-\infty\,;\,ln(\frac{2}{3})[$.
De plus, on sait que :

- la fonction h est continue et strictement décroissante sur $[\,ln(\frac{2}{3})\,;\,+\infty[$.
- $ln(3) - \frac{2}{3} \approx 0,43 > 0$ et : $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$
- $-1 \in\,]-\infty\,;\,ln(3)-\frac{2}{3}]$

On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $h(x) = -1$ admet une unique solution α dans $[\,ln(\frac{2}{3})\,;\,+\infty[$ puis dans $\mathbb{R}$.
L'affirmation 5 est vraie.

Exercice 2 :

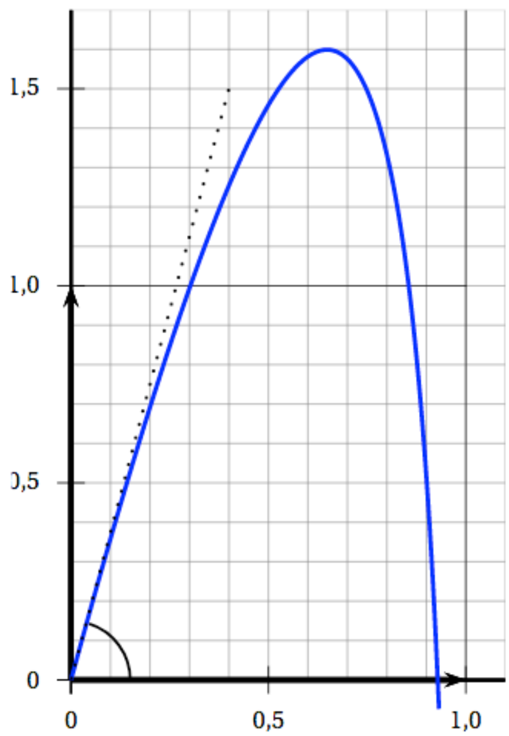
Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètre.

Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.

On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[\,0\,;\,1\,[$ par :

$$f(x) = b\,x + 2\,ln(1-x)$$

où b est un paramètre réel supérieur à 2, x est l'abscisse du projectile et $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.



1. La fonction f est dérivable sur $[\,0\,;\,1\,[$. On note f' sa fonction dérivée. On admet que la fonction f possède un maximum sur $[\,0\,;\,1\,[$ et que pour tout réel x de cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{-b\,x+b-2}{1-x}$$

Montrer que le maximum de f est égal à $b-2+2\,ln(\frac{2}{b})$.

Le maximum est atteint lorsque la fonction dérivée s'annule et change de signe.
$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-b\,x+b-2}{1-x}=0 \Leftrightarrow -b\,x+b-2=0$ et : $1-x\neq 0 \Leftrightarrow x=\frac{b-2}{b}\neq 1$
On calcule alors la valeur M de ce maximum :
$\text{M}=f(\frac{b-2}{b})=b\times\frac{b-2}{b}+2\,ln(1-\frac{b-2}{b})= b-2+2\,ln(\frac{b-b+2}{b})=b-2+2\,ln(\frac{2}{b})$.

2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile de dépasse pas $1,6$.

La hauteur maximale du projectile de dépasse pas $1,6$ mètre si et seulement si $\text{M}\leq 1,6$.
On sait que $b>2$ et on considère que le maximum M est une fonction de b, définie et dérivable sur $]2\,;+\infty[$.
$\forall\, b\in]2\,;+\infty[,\ M(b)=b-2+2\,ln(\frac{2}{b})=b-2+2ln(2)-2ln(b)$
On en déduit : $M'(b)=1-2\times\frac{1}{b}=\frac{b-2}{b}$
Si $b>2$ alors $b>0$ et $b-2>0$. On en déduit que : $\forall\, b\in]2\,;+\infty[,\ M'(b)>0$
La fonction M est donc strictement croissante sur $]2\,;+\infty[$. Etant dérivable, elle est également continue.
$\lim\limits_{b\to 2} M(b)=2-2+2\,ln(1)=0$
De plus, $M(6)=6-2+2\,ln(\frac{2}{6})=4+2\,ln(\frac{1}{3})=4-2\,ln(3)\approx 1,8$
$1,6\in]0\,;M(6)[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $M(b)=1,6$ admet une unique solution β sur $]2\,;6[$ puis sur $]2\,;+\infty[$ puisque la fonction M est strictement croissante.
En appliquant l'algorithme de balayage, on trouve $\beta\approx 5,69$.
Finalement, la hauteur maximale du projectile de dépasse pas $1,6$ mètre si et seulement si $b\in]2\,;\beta]$.

3. Dans cette question, on choisit $b=5,69$.
L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus.
Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ.

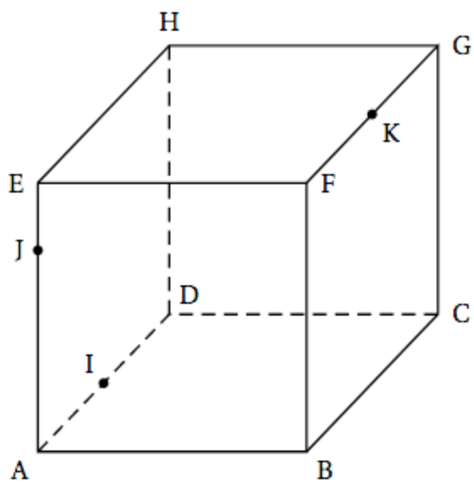
Si $b=5,69$ Alors : $f(x)=5,69\,x+2\,ln(1-x)$ et : $f'(x)=\frac{-5,69\,x+3,69}{1-x}$
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est : $f'(0)=3,69$.
Ce coefficient directeur correspond à la pente de la tangente, c'est-à-dire à $tan(\theta)$.
Ainsi, en utilisant la calculatrice et la touche ArcTan, on obtient $\theta\approx 74,8\,°$.

Exercice 3 :

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH.

Les trois points I, J et K sont définis par les conditions suivantes :

- I est le milieu du segment [AD]
- J est tel que $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{4}\,\overrightarrow{AE}$
- K est le milieu du segment [FG]



Partie A :

1. Sur la figure donnée en annexe, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH). On laissera les traits de construction sur la figure.

Remarque : P est le point d'intersection des droites (IJ) et (EH).

2. En déduire, en justifiant, l'intersection des plans (IJK) et (EFG).

Le point P appartient à (IJ) et à (EH).
Or (IJ) $\subset$ (IJK) et (EH) $\subset$ (EFG)
On en déduit que P $\in$ (IJK) $\cap$ (EFG).
K étant le milieu du segment [FG], il appartient lui aussi à l'intersection des plans (IJK) et (EFG).
On en déduit que l'intersection de ces deux plans est la droite (PK). Elle coupe l'arête [EF] en L.

Partie B :

On se place désormais dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1. a) Donner, sans justification, les coordonnées des points I, J et K.

Dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ on a : $I(0\,;\frac{1}{2}\,;0)$ $J(0\,;0\,;\frac{3}{4})$ $K(1\,;\frac{1}{2}\,;1)$

b) Déterminer les réels a et b tels que le vecteur $\vec{n}(4\,;a\,;b)$ soit orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\a\\b\end{pmatrix}$

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ si et seulement si a et b sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases}\vec{n}\,.\,\overrightarrow{IJ}=0\\\vec{n}\,.\,\overrightarrow{IK}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0-\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b=0\\4+0\,a+1\,b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}a=\frac{3}{4}b\\b=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}a=-3\\b=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-6\\b=-4\end{cases}$$

Finalement, $\vec{n}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}4\\-6\\-4\end{pmatrix}$.

c) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est $4x-6y-4z+3=0$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-6\\-4\end{pmatrix}$ étant orthogonal aux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$, c'est un vecteur normal au plan (IJK).

$M(x\,;y\,;z)\in$ (IJK) si et seulement si : $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{IM}=0$

$$4(x-0)-6(y-\tfrac{1}{2})-4(z-0)=0$$
$$4x-6y+3-4z=0$$
$$4x-6y-4z+3=0$$

2. a) Donner une représentation paramétrique de la droite (CG).

La droite (CG) passe par $C(1\,;1\,;0)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

On en déduit une représentation paramétrique de la droite (CG) : $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

b) Calculer les coordonnées du point N, intersection du plan (IJK) et de la droite (CG).

$N(x\,;y\,;z)\in$ (IJK) $\cap$ (CG) si et seulement si : $\begin{cases}4x-6y-4z+3=0\\x=1\\y=1\\z=t\end{cases}$

On en déduit : $4-6-4t+3=0 \Leftrightarrow 4t=1 \Leftrightarrow t=\frac{1}{4}$

Ainsi, N a pour coordonnées $(1\,;1\,;\frac{1}{4})$

c) Placer le point N sur la figure et construire en couleur la section du cube par le plan (IJK).

<u>Méthode</u> : On place le point Q sur [CD] de sorte que (IQ) et (LK) soient parallèles.
La section du cube par le plan (IJK) est alors l'hexagone IJLKNQ.

Partie C :

On note R le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK). Le point R est donc l'unique point du plan (IJK) tel que la droite (FR) est orthogonale au plan (IJK).

On définit l'intérieur du cube comme l'ensemble des points M$(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1. \\ 0 < z < 1 \end{cases}$

Le point R est-il à l'intérieur du cube ?

On a : F$(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et on pose R$(x\ ;\ y\ ;\ z)$

Et, puisque (FR) est orthogonale au plan (IJK), alors le vecteur $\overrightarrow{FR}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

On en déduit qu'il existe un réel k tel que $\begin{cases} x-1 = 4k \\ y = -6k \\ z-1 = -4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+4k \\ y = -6k \\ z = 1-4k \end{cases}$

Or R $\in$ (IJK) : $4x - 6y - 4z + 3 = 0$

On en déduit : $4(1+4k) - 6(-6k) - 4(1-4k) + 3 = 0$

$4 + 16k + 36k - 4 + 16k + 3 = 0$

$68k = -3$

$k = -\frac{3}{68}$

$\begin{cases} x = 1+4k \\ y = -6k \\ z = 1-4k \end{cases}$ Donc : $\begin{cases} x = 1 - \frac{12}{68} = \frac{56}{68} = \frac{14}{17} \\ y = \frac{18}{68} = \frac{9}{34} \\ z = 1 + \frac{12}{68} = \frac{20}{17} \end{cases}$

Les coordonnées de R étant toutes des réels compris strictement entre 0 et 1 on en déduit que R est à l'intérieur du cube.

Annexe