Nom :
Prénom :

DS n°6
le 22/01/2018

Classe :
T S …

Compétences évaluées	*Avis du professeur* — *Acquis*	*En cours d'acquisition*	*Non Acquis*
Etudier les limites d'une fonction trigonométrique.			
Dériver une fonction			
Etudier le signe d'une fonction trigonométrique.			
Tracer la courbe représentative d'une fonction trigonométrique.			
Etudier la parité d'une fonction.			
Etudier la périodicité d'une fonction.			
Déterminer des probabilités par lecture d'un tableau à double entrée.			
Déterminer si deux évènements sont indépendants.			
Calculer une probabilité lorsque des évènements sont indépendants.			
Modéliser une situation à l'aide d'un arbre de probabilité pondéré.			
Calculer des probabilités.			
Déterminer une loi de probabilité.			
Utiliser la calculatrice pour déterminer des probabilités.			
Maîtrise et rigueur des calculs.			
Maîtrise des raisonnements. Soin de l'expression écrite.			

Barème	Ex 1 **(EC)** : 5,5 points	Ex 2 **(EC)** : 3 points	Ex 3 : 6 points	Ex 4 : 5,5 points	Total : 20 points
Note de l'élève					

Les exercices seront traités dans l'ordre de votre choix. La présentation et le soin apportés à la présentation de votre copie rentreront pour une part importante dans sa notation.

Exercice 1 :

Partie A : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{sin\, x}{x}$.

1. Etudier la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement ?
2. Déterminer la limite de f en 0. Démontrer le résultat.

Partie B : Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ \pi]$ par $g(x) = 2\,cos^2(x)$.

1. Montrer que, pour tout réel x de $[0\ ;\ \pi]$, $g'(x) = -4\,cos(x)sin(x)$.
2. En déduire le signe de $g'(x)$ sur $[0\ ;\ \pi]$ puis le tableau des variations de la fonction g.
3. Tracer la courbe représentative de g sur $[0\ ;\ \pi]$.

Exercice 2 :

Partie A :

Le document ci-dessous donne la répartition des accidents de la route répertoriés en France métropolitaine pendant l'année 2013 en fonction de la typologie du lieu où ils se sont produits.

1. Quelle est la probabilité qu'un accident ait eu lieu sur une route départementale et qu'il ait été grave.
2. Quelle est la probabilité qu'une personne morte lors d'un accident de la route en 2013 l'ait été sur une autoroute ?

	Accidents corporels	dont mortels	dont graves
Autoroutes	4 536	215	1 774
Routes nationales	3 096	263	1 432
Routes départementales	18 424	1 970	11 910
Voies communales	29 510	529	8 867
Hors réseau public	103	5	52
Parkings publics	379	11	180
Autres voies	764	27	331
TOTAL	56 812	3 020	24 546

Partie B :

1. Pour une certaine expérience aléatoire on considère deux évènements A et B tels que $P(\bar{A}) = 0{,}6$ et $P_B(A) = 0{,}6$. Les évènements A et B sont ils indépendants ?
2. Un avion possède deux moteurs dont les pannes éventuelles sont indépendantes les unes des autres. Chaque moteur a une probabilité de 0,0003 % de tomber en panne. Quelle est la probabilité que ses deux moteurs tombent en panne lors d'un vol ?

Exercice 3 :

Partie A :

En utilisant sa base de donnée, la Sécurité Sociale estime que la proportion de Français présentant, dès la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10 %.
L'étude a également permis de prouver que 30 % des Français présentant cette malformation seront victimes d'un accident cardiaque au cours de leur vie, alors que cette proportion n'est que de 8 % chez ceux qui ne souffrent pas de cette malformation congénitale.
On choisit au hasard une personne dans la population française. On considère les évènements :

- M : « La personne présente, dès la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme ».
- C : « La personne a été ou sera victime d'un accident cardiaque au cours de sa vie ».

1. Représenter cette situation par un arbre de probabilité pondéré.
2. a) Montrer que $P(M \cap C) = 0{,}03$.

   b) Calculer $P(C)$.
3. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque. Quelle est la probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme depuis sa naissance ? Arrondir à 10^{-3} près.

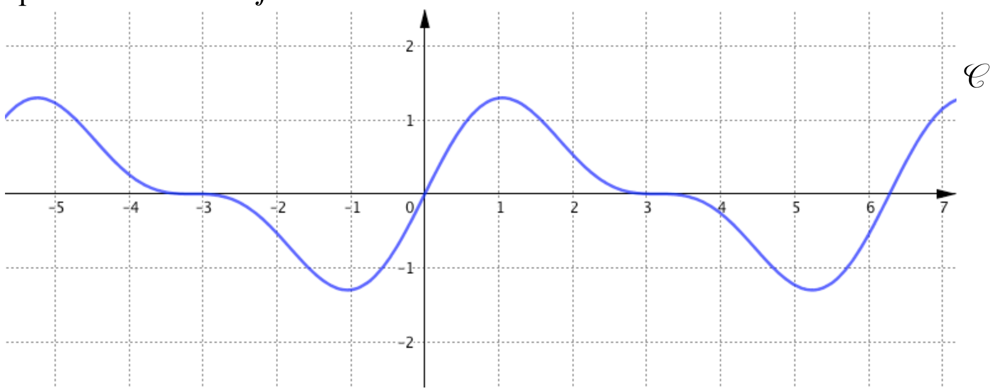
Partie B :

La Sécurité Sociale décide de lancer une enquête de santé publique sur ce problème de malformation cardiaque de type anévrisme, sur un échantillon de 400 personnes prises au hasard dans la population française.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes de l'échantillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme.

1. Définir la loi de probabilité de X. Exprimer $P(X = k)$ en fonction de k.
2. Déterminer $P(X = 35)$. Arrondir à 10^{-3} près.
3. Déterminer la probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme. Arrondir à 10^{-3} près.

Exercice 4 :

Partie A : f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + \cos x)\sin x$.
La courbe représentative $\mathscr{C}$ de f est donnée ci-dessous.



1. Conjecturer graphiquement la parité et la périodicité de la fonction f.
2. Démontrer vos conjectures.

Partie B : La fonction f précédente est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + \cos x)\sin x$.

1. Justifier qu'on peut restreindre l'étude de f sur $[0 ; \pi]$.
2. Montrer que, pour tout réel x de $[0 ; \pi]$, $f'(x) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.
3. Dresser le tableau des variations de f sur $[0 ; \pi]$.

Correction du DS n°6

Exercice 1 :

Partie A : f est la fonction définie sur ℝ* par $f(x) = \frac{sin\,x}{x}$.

1. Etudier la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement ?

∀ $x \in$ ℝ*, on a : $-1 \leq sin\,x \leq 1$
Si $x > 0$ alors : $-\frac{1}{x} \leq \frac{sin\,x}{x} \leq \frac{1}{x}$ C'est-à-dire : $-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$
Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
On peut en déduire que la courbe représentative de f admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $+\infty$.

2. Déterminer la limite de f en 0. Démontrer le résultat.

∀ $x \in$ ℝ*, on a : $\frac{sin\,x}{x} = \frac{sin\,x - sin\,0}{x - 0}$
On reconnaît le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0.
Or, la fonction sinus est dérivable sur ℝ et sa fonction dérivée est la fonction cosinus.
Puisque, lorsqu'elle existe, la limite du taux d'accroissement en 0 est égale au nombre dérivé en 0.
Alors : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sin\,x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{sin\,x - sin\,0}{x - 0} = cos\,0 = 1$

Partie B : Soit g la fonction définie sur $[0\,;\pi]$ par $g(x) = 2\,cos^2(x)$.

1. Montrer que, pour tout réel x de $[0\,;\pi]$, $g'(x) = -4\,cos(x)sin(x)$.

∀ $x \in [0\,;\pi]$, $g(x) = 2\,cos^2(x) = 2\,[u(x)]^2$ en posant : $u(x) = cos\,x$
or : $u'(x) = -sin\,x$
On en déduit : $g'(x) = 2 \times 2\,u'(x)\,u(x) = 2 \times 2\,(-sin\,x)\,cos\,x = -4\,cos(x)sin(x)$.

2. En déduire le signe de $g'(x)$ sur $[0\,;\pi]$ puis le tableau de variations de la fonction g.

On dresse le tableau de signes de $g'(x)$ sur $[0\,;\pi]$:

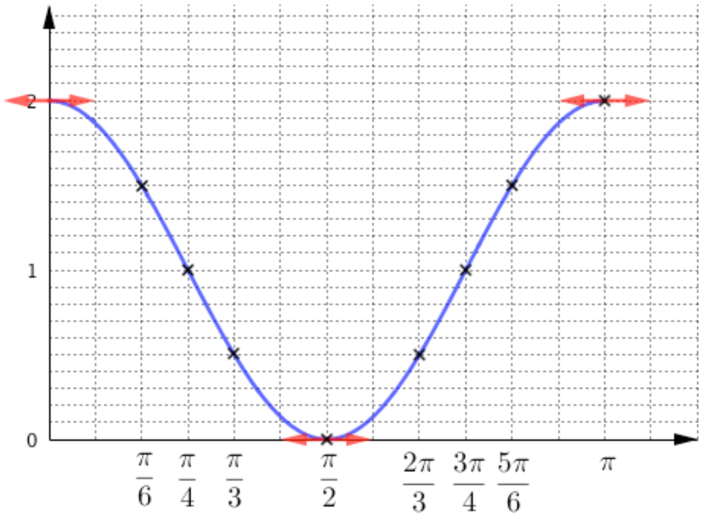
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$cos\,x$		$+$	0	$-$	
$sin\,x$	0	$+$		$+$	0
-4		$-$		$-$	
$g'(x) = -4\,cos(x)sin(x)$	0	$-$	0	$+$	0

On en déduit que la fonction g est décroissante sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$ puis croissante sur $[\frac{\pi}{2}\,;\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$g(x)$	2	↘	0	↗	2

3. Tracer la courbe représentative de g sur $[0\ ;\ \pi]$.

Méthode : On pense à faire apparaître les tangentes horizontales (en rouge sur la figure) pour mieux sentir les courbures lors du tracé de la courbe. Dans la consigne, on n'impose pas d'utiliser un repère orthonormé.
En prenant 12 carreaux pour passer de 0 à π en abscisses, on peut placer plus précisément les points correspondants aux fractions de π usuelles : $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$, etc. On utilise la fonction *Trace* de la calculatrice pour placer quelques points.



Exercice 2 :

Partie A :

Le document ci-dessous donne la répartition des accidents de la route répertoriés en France métropolitaine pendant l'année 2013 en fonction de la typologie du lieu où ils se sont produits.

	Accidents		
	corporels	dont mortels	dont graves
Autoroutes	4 536	215	1 774
Routes nationales	3 096	263	1 432
Routes départementales	18 424	1 970	11 910
Voies communales	29 510	529	8 867
Hors réseau public	103	5	52
Parkings publics	379	11	180
Autres voies	764	27	331
TOTAL	**56 812**	**3 020**	**24 546**

1. Quelle est la probabilité qu'un accident ait eu lieu sur une route départementale et qu'il ait été grave.

Sur les 56812 accidents corporels, 11910 ont eu lieu sur une route départementale et étaient graves.
On en déduit la probabilité $p = \frac{11910}{56812} = \frac{5955}{28406}$

2. Quelle est la probabilité qu'une personne morte lors d'un accident de la route en 2013 l'ait été sur une autoroute ?

Sur les 3020 accidents corporels mortels, 215 ont eu lieu sur une autoroute. On en déduit la probabilité $p' = \frac{215}{3020} = \frac{43}{604}$

Partie B :

1. Pour une certaine expérience aléatoire on considère deux évènements A et B tels que $P(\bar{A}) = 0{,}6$ et $P_B(A) = 0{,}6$. Les évènements A et B sont ils indépendants ?

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$
Or : $P_B(A) = 0{,}6 \neq P(A)$
Donc les évènements A et B ne sont pas indépendants.

2. Un avion possède deux moteurs dont les pannes éventuelles sont indépendantes les unes des autres. Chaque moteur a une probabilité de 0,0003 % de tomber en panne. Quelle est la probabilité que ses deux moteurs tombent en panne lors d'un vol ?

On considère les évènements A : « Le moteur A tombe en panne » et B : « Le moteur B tombe en panne ».
On sait que A et B sont indépendants et que $P(A) = P(B) = \frac{0{,}0003}{100} = \frac{3 \times 10^{-4}}{10^{2}} = 3 \times 10^{-6}$
On en déduit la probabilité que les deux moteurs tombent en panne :
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = (3 \times 10^{-6})^2 = 9 \times 10^{-12}$

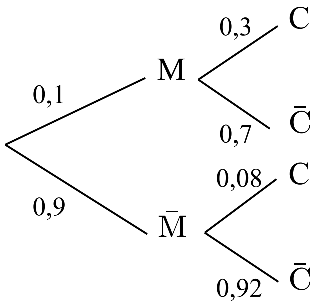
Exercice 3 :

Partie A :

En utilisant sa base de donnée, la Sécurité Sociale estime que la proportion de Français présentant, dès la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10 %.
L'étude a également permis de prouver que 30 % des Français présentant cette malformation seront victimes d'un accident cardiaque au cours de leur vie, alors que cette proportion n'est que de 8 % chez ceux qui ne souffrent pas de cette malformation congénitale.
On choisit au hasard une personne dans la population française. On considère les évènements :

- M : « La personne présente, dés la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme ».
- C : « La personne a été ou sera victime d'un accident cardiaque au cours de sa vie ».

1. Représenter cette situation par un arbre de probabilité pondéré.



2. a) Montrer que $P(M \cap C) = 0,03$.

$P(M \cap C) = P(M) \times P_M(C) = 0,1 \times 0,3 = 0,03$

b) Calculer $P(C)$.

On utilise la formule des probabilités totales :
$P(C) = P(M \cap C) + P(\bar{M} \cap C) = 0,03 + 0,9 \times 0,08 = 0,102$

3. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque. Quelle est la probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme depuis sa naissance ? Arrondir à 10^{-3} près.

$P_C(M) = \dfrac{P(M \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,03}{0,102} \approx 0,294$
La probabilité qu'une personne présente une malformation cardiaque de type anévrisme depuis sa naissance, sachant qu'elle a été victime d'un accident cardiaque, est d'environ 0,294.

Partie B :

La Sécurité Sociale décide de lancer une enquête de santé publique sur ce problème de malformation cardiaque de type anévrisme, sur un échantillon de 400 personnes prises au hasard dans la population française.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes de l'échantillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme.

1. Définir la loi de probabilité de X. Exprimer $P(X = k)$ en fonction de k.

« Tirer au hasard une personne dans la population française et tester si elle présente une malformation cardiaque » est une épreuve de Bernoulli puisqu'il n'y a que deux issues possibles : M et $\bar{M}$ en réutilisant les notations introduites dans la partie A. On sait que $P(M) = 0,1$.
La sécurité sociale répète cette expérience 400 fois dans des conditions d'indépendance. On obtient un schéma de Bernoulli. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes de l'échantillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme. X prend des valeurs entières de 0 à 400. On en déduit que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(400 ; 0,1)$.

Quel que soit l'entier k compris entre 0 et 400, on a : $P(X = k) = \dbinom{400}{k} \times 0,1^{k} \times 0,9^{400-k}$

2. Déterminer $P(X = 35)$. Arrondir à 10^{-3} près.

$P(X = 35) = \binom{400}{35} \times 0{,}1^{35} \times 0{,}9^{365} \approx 0{,}049$

Remarque : Pour obtenir ce résultat on tape :
- BinomialPD(35,400,0.1) sur CASIO
- binomFdp(35,0.1,400) ou binompdf(35,0.1,400) sur TI

3. Déterminer la probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme. Arrondir à 10^{-3} près.

$P(X \geq 30) = 1 - P(X \leq 29) \approx 0{,}964$

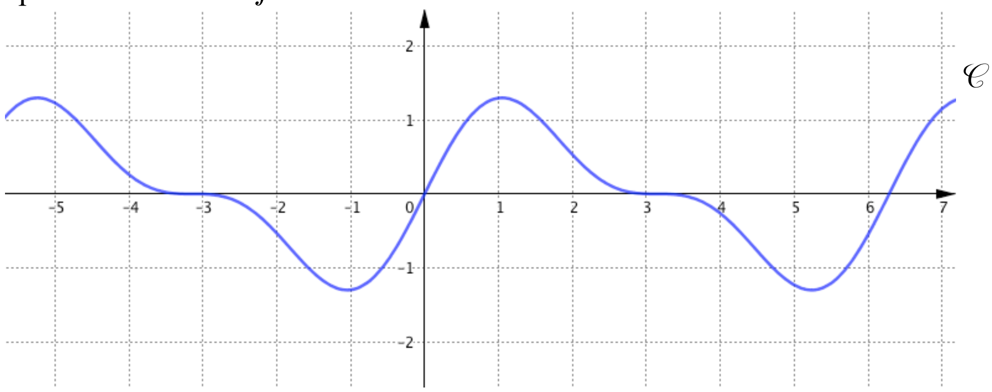
La probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme est d'environ 0,964.

Remarque : Pour obtenir ce résultat on tape :
- 1 – BinomialCD(29,400,0.1) sur CASIO
- 1 – binomFdp(29,0.1,400) ou 1 – binompdf(29,0.1,400) sur TI

Exercice 4 :

Partie A : f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + cos\, x)\, sin\, x$.

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de f est donnée ci-dessous.



1. Conjecturer graphiquement la parité et la périodicité de la fonction f.

La fonction f semble impaire et 2π- périodique sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer vos conjectures.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et :

$f(-x) = (1 + cos(-x))\, sin(-x) = (1 + cos\, x) \times (-sin\, x) = -(1 + cos\, x)\, sin\, x = -f(x)$

On en déduit que f est impaire sur $\mathbb{R}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ et :

$f(x + 2\pi) = (1 + cos(x + 2\pi))\, sin(x + 2\pi) = (1 + cos\, x)\, sin\, x = f(x)$

On en déduit que f est 2π- périodique sur $\mathbb{R}$.

Partie B : La fonction f précédente est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + cos\, x)\, sin\, x$.

1. Justifier qu'on peut restreindre l'étude de f sur $[0 ; \pi]$.

Puisque f est 2π- périodique sur $\mathbb{R}$, on peut restreindre son étude sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ d'amplitude 2π. Puisque f est impaire sur $\mathbb{R}$, elle l'est aussi sur $[-\pi ; \pi]$ et sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère. On peut donc restreindre l'étude de f sur $[0 ; \pi]$.

2. Montrer que, pour tout réel x de $[0\ ;\ \pi]$, $f'(x) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.

$\forall\ x \in [0\ ;\ \pi]$, $f(x) = (1 + \cos x)\sin x = u(x)\,v(x)$ en posant : $u(x) = 1 + \cos x$ et : $v(x) = \sin x$
or : $u'(x) = -\sin x$ et : $v'(x) = \cos x$

On en déduit : $f'(x) = u'(x)\,v(x) + v'(x)\,u(x)$

$f'(x) = -\sin x \sin x + \cos x(1 + \cos x)$

$f'(x) = -\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x$

Or : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow -\sin^2 x = \cos^2 x - 1$

Donc : $f'(x) = \cos^2 x - 1 + \cos x + \cos^2 x = 2\cos^2 x + \cos x - 1$

D'autre part : $(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 2\cos^2 x + 2\cos x - \cos x - 1 = 2\cos^2 x + \cos x - 1$

Finalement : $\forall\ x \in [0\ ;\ \pi]$, $f'(x) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

3. Dresser le tableau des variations de f sur $[0\ ;\ \pi]$.

$\forall\ x \in [0\ ;\ \pi]$, $f'(x) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

On résout les équations et inéquations suivantes sur $[0\ ;\ \pi]$, en utilisant si besoin le cercle trigonométrique :

- $2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$
- $2\cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in [0\ ;\ \frac{\pi}{3}]$
- $2\cos x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in [\frac{\pi}{3}\ ;\ \pi]$
- $\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi$
- $\forall\ x \in [0\ ;\ \pi]$, $\cos x \geq -1 \Leftrightarrow \cos x + 1 \geq 0$

On en déduit le tableau des signes suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$2\cos x - 1$		$+$	0	$-$	
$\cos x + 1$		$+$		$+$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0

$f(0) = (1 + \cos 0)\sin 0 = (1 + 1) \times 0 = 0$
$f(\pi) = (1 + \cos \pi)\sin \pi = (1 - 1) \times 0 = 0$
$f(\frac{\pi}{3}) = (1 + \cos \frac{\pi}{3})\sin \frac{\pi}{3} = (1 + \frac{1}{2})\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

On en déduit le tableau des variations de f suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0