Nom :
Classe : T S

DS n°7
le 11/04/2017

Note :
… / 10

	Avis de l'élève		Avis du professeur	
Connaissances / Compétences évaluées	***Oui***	***Non***	***Oui***	***Non***
Déterminer si une droite est orthogonale à un plan.				
Déterminer si des droites sont coplanaires ou non.				
Déterminer si une équation cartésienne défini un plan donné ou non.				
Déterminer si une droite est strictement parallèle à un plan ou non.				
Déterminer si une droite est orthogonale à une autre / perpendiculaire à un plan.				
Déterminer l'équation cartésienne du plan médiateur d'un segment.				
Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan.				

Exercice 1 : **… / 7**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points :

$$A(0;-1;1),\ B(4;-3;0) \text{ et } C(-1;-2;-1).$$

On note $\mathscr{P}$ le plan passant par A, B et C et (Δ) la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t - 1 \\ z = 8 - 2t \end{cases} \text{, avec } t \in \mathbb{R}.$$

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vrai ou fausse, en justifiant la réponse.

- Affirmation 1 : (Δ) est orthogonale à toute droite du plan $\mathscr{P}$.
- Affirmation 2 : Les droites (Δ) et (AB) sont coplanaires.
- Affirmation 3 : Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne $x + 3y - 2z + 5 = 0$

On note (d) la droite passant par l'origine du repère et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

- Affirmation 4 : (d) est strictement parallèle au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.

On note (d') la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

- Affirmation 5 : (d') est orthogonale à (d) et perpendiculaire au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.

Exercice 2 : **… / 3**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne les points :

$$A(2;5;-1),\ B(0;3;3) \text{ et } C(1;1;4).$$

On définit le plan médiateur d'un segment par l'ensemble des points équidistants de ses extrémités.

1. Montrer que le plan médiateur du segment [AB] a pour équation cartésienne :

$$x + y - 2z - 3 = 0$$

2. Déterminer le point de la droite (AC) équidistant de A et de B.

Correction du DS n°7

Exercice 1 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points :

$$A(0;-1;1),\ B(4;-3;0) \text{ et } C(-1;-2;-1).$$

On note $\mathscr{P}$ le plan passant par A, B et C et (Δ) la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t - 1 \\ z = 8 - 2t \end{cases} \text{, avec } t \in \mathbb{R}.$$

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vrai ou fausse, en justifiant la réponse.

- Affirmation 1 : (Δ) est orthogonale à toute droite du plan $\mathscr{P}$.

Le plan $\mathscr{P}$ est dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. La droite (Δ) est dirigée par $\vec{\delta}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

On a : $\vec{\delta}\,.\,\overrightarrow{AB} = 4 - 6 + 2 = 0$ Et : $\vec{\delta}\,.\,\overrightarrow{AC} = -1 - 3 + 4 = 0$
Donc (Δ) est orthogonale aux droites (AB) et (AC) qui sont sécantes dans le plan $\mathscr{P}$.
Or, si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan. On en déduit que l'affirmation 1 est VRAIE.

- Affirmation 2 : Les droites (Δ) et (AB) sont coplanaires.

Les droites (Δ) et (AB) sont coplanaires si et seulement si elles sont parallèles ou sécantes.

On rappelle : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{\delta}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\frac{4}{1} \neq \frac{-2}{3} \neq \frac{-1}{-2}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\delta}$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que (Δ) et (AB) ne sont pas parallèles.

Recherche du point d'intersection éventuel entre (Δ) et (AB) :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = t \\ y = 3t - 1 \\ z = 8 - 2t \end{cases} \text{, avec } t \in \mathbb{R} \qquad (AB) : \begin{cases} x = 4t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = 1 - t' \end{cases} \text{, avec } t' \in \mathbb{R}.$$

$$M(x;y;z) \in (\Delta) \cap (AB) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4t' \\ 3t - 1 = -1 - 2t' \\ 8 - 2t = 1 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4t' \\ 12t' - 1 = -1 - 2t' \\ 8 - 8t' = 1 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4t' \\ 14t' = 0 \\ 7 = 7t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4t' \\ t' = 0 \\ t' = 1 \end{cases}$$

Ce système n'ayant pas de solution, il n'existe aucun point d'intersection entre (Δ) et (AB).
Autrement dit, ces droites ne sont pas sécantes. On en déduit que l'affirmation 2 est FAUSSE.

- Affirmation 3 : Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne $x + 3y - 2z + 5 = 0$

On vérifie si les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation donnée :
$0 + 3 \times (-1) - 2 \times 1 + 5 = 0 - 3 - 2 + 5 = 0$
$4 + 3 \times (-3) - 2 \times 0 + 5 = 4 - 9 + 0 + 5 = 0$
$-1 + 3 \times (-2) - 2 \times (-1) + 5 = -1 - 6 + 2 + 5 = 0$
Les points A, B et C définissent le plan $\mathscr{P}$ et appartiennent au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.
On en déduit que l'affirmation 3 est VRAIE.

On note (d) la droite passant par l'origine du repère et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}11\\-1\\4\end{pmatrix}$.

- Affirmation 4 : (d) est strictement parallèle au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}11\\-1\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.
$\vec{u}\ .\ \vec{n} = 11 - 3 - 8 = 0$. Donc (d) est parallèle à $\mathscr{P}$.
Le point $O(0;0;0)$ appartient à (d) mais pas à $\mathscr{P}$ (puisque $0 + 3 \times 0 - 2 \times 0 + 5 = 5 \neq 0$).
On en déduit que la droite (d) n'est pas incluse dans le plan $\mathscr{P}$ et que l'affirmation 4 est VRAIE.

On note (d') la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\2\\-5\end{pmatrix}$.

- Affirmation 5 : (d') est orthogonale à (d) et perpendiculaire au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.

$\vec{v}\begin{pmatrix}2\\2\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d') et $\vec{u}\begin{pmatrix}11\\-1\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).
$\vec{u}\ .\ \vec{v} = 22 - 2 - 20 = 0$. Donc (d) est orthogonale à (d').
$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.
$\frac{2}{1} \neq \frac{2}{3} \neq \frac{-5}{-2}$ donc $\vec{v}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires.
On en déduit que (Δ) et $\mathscr{P}$ ne sont pas perpendiculaires et que l'affirmation 5 est FAUSSE.

Exercice 2 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne les points :

$$A(2;5;-1),\ B(0;3;3) \text{ et } C(1;1;4).$$

On définit le plan médiateur d'un segment par l'ensemble des points équidistants de ses extrémités.

1. Montrer que le plan médiateur du segment [AB] a pour équation cartésienne :

$$x + y - 2z - 3 = 0$$

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.
$MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = (x-0)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2$
$MA = MB \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 + z^2 + 2z + 1 = x^2 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 6z + 9$
$MA = MB \Leftrightarrow -4x - 10y + 2z + 30 = -6y - 6z + 18$
$MA = MB \Leftrightarrow -4x - 10y + 6y + 2z + 6z + 30 - 18 = 0$
$MA = MB \Leftrightarrow -4x - 4y + 8z + 12 = 0$
En divisant par -4 chaque membre de l'équation cartésienne obtenue on a :
$MA = MB \Leftrightarrow x + y - 2z - 3 = 0$

2. Déterminer le point de la droite (AC) équidistant de A et de B.

La droite (AC) est définie par le point $C(1;1;4)$ et le vecteur $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}1\\4\\-5\end{pmatrix}$.

On en déduit une représentation paramétrique de (AC) : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = 4 - 5t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

On note $\mathscr{P}$ le plan médiateur de [AB] d'équation $x + y - 2z - 3 = 0$.

$M(x\,;y\,;z) \in (AC) \cap \mathscr{P} \Leftrightarrow (S) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = 4 - 5t \\ x + y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$

$$(S) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = 4 - 5t \\ 1 + t + 1 + 4t - 2(4 - 5t) - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = 4 - 5t \\ 1 + t + 1 + 4t - 8 + 10t - 3 = 0 \end{cases}$$

$$(S) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = 4 - 5t \\ 15t = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = 4 - 5t \\ t = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{3}{5} \\ y = 1 + \frac{12}{5} \\ z = 4 - \frac{15}{5} \\ t = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = \frac{17}{5} \\ z = \frac{5}{5} = 1 \\ t = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Finalement, le point de le droite (AC) équidistant de A et de B est $M(\frac{8}{5}\,;\frac{17}{5}\,;1)$.