Nom :
Prénom :

DS n°7
le 05/04/2018

Classe :
T S 1

Compétences évaluées	*Avis du professeur*		
	Acquis	*En cours d'acquisition*	*Non Acquis*
Déterminer l'équation cartésienne d'un plan.			
Justifier si des points appartiennent ou non à un plan.			
Déterminer une représentation paramétrique de droite.			
Déterminer le point d'intersection d'une droite et d'un plan.			
Calculer une distance.			
Déterminer les points d'intersection d'un plan avec les axes d'un repère.			
Représenter un plan dans un repère.			
Déterminer des limites.			
Dériver une fonction.			
Résoudre une inéquation / Déterminer le signe d'une fonction.			
Déterminer le point d'intersection d'une courbe et d'un axe.			

Barème	Ex 1 **(EC)** : 3 points	Ex 2 **(EC)** : 3,5 points	Ex 3 **(EC)** : 3,5 points	Ex 4 : 10 points	Total : 20 points
Note de l'élève					

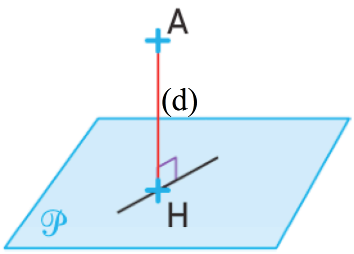
Les exercices seront traités dans l'ordre de votre choix. La présentation et le soin apportés à la présentation de votre copie rentreront pour une part importante dans sa notation.

Exercice 1 : On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace. **… / 3**

On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point $A(3\,;2\,;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2\,;-1\,;1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.
2. Les points $B(3\,;2\,;3)$ et $C(1\,;0\,;3)$ appartiennent-ils à $\mathscr{P}$?

Exercice 2 : Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+y+z-1=0$ et le point $A(2\,;3\,;4)$. **… / 3,5**



On souhaite déterminer la distance du point A au plan, c'est-à-dire la distance AH où H est le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la perpendiculaire (d) à $\mathscr{P}$ passant par A.

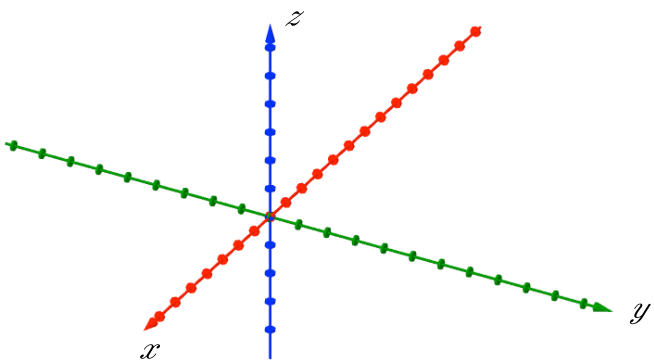
1. Déterminer une représentation paramétrique de (d).
2. Calculer les coordonnées de H.
3. Conclure.

Exercice 3 : On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace. **… / 3,5**

Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne :

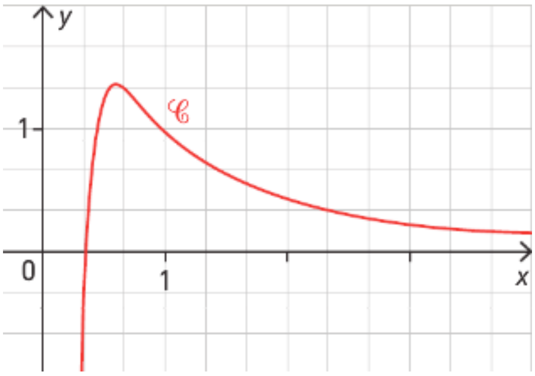
$$2x+y+4z-8=0$$

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{P}$ avec chacun des axes du repère.
2. Représenter alors ce plan.



Exercice 4 : **… / 10**

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1+ln\,x}{x^2}$ et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous.



1. a) Etudier la limite de f en 0.

   b) Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln\,x}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

   c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   Démontrer que pour tout réel x de cet intervalle on a : $f'(x) = \frac{-1-2\,ln\,x}{x^3}$.

   b) Résoudre sur $]0\,;+\infty[$ l'inéquation $-1-2\,ln\,x > 0$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

   c) Dresser le tableau de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

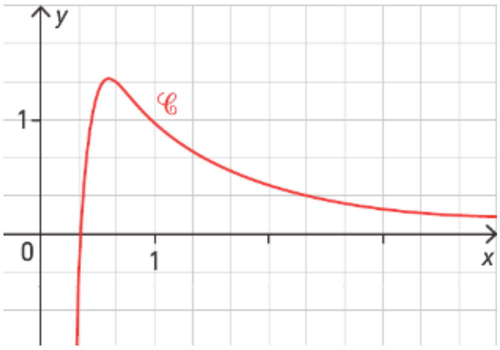
3. a) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

   b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Correction du DS n°7

Exercices 1, 2 et 3 : Voir les corrections des exercices n° 7, 46 et 54 p 343, 351 et 353 du livre.

Exercice 4 : Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1+\ln x}{x^2}$ et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous.



1. a) Etudier la limite de f en 0.

$\forall\, x\in\,]0\,;+\infty[,\ f(x)=\frac{1+\ln x}{x^2}=\frac{1}{x^2}(1+\ln x)$

On sait que : $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

On en déduit, par somme : $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\ln x)=-\infty$

De plus : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$

Donc, par produit de limites : $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}(1+\ln x)=-\infty$

b) Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

On sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0^+$

Or : $\forall\, x\in\,]0\,;+\infty[,\ f(x)=\frac{1+\ln x}{x^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\times\frac{\ln x}{x}$

De plus : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+$

On en déduit, par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\times\frac{\ln x}{x}=0^+$ puis, par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\times\frac{\ln x}{x}=0^+$

c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$ donc $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale en $x=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0^+$ donc $\mathscr{C}$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$.

2. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Démontrer que pour tout réel x de cet intervalle on a : $f'(x)=\frac{-1-2\ln x}{x^3}$.

$\forall\, x\in\,]0\,;+\infty[,\ f(x)=\frac{1+\ln x}{x^2}=\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=1+\ln x$ et : $v(x)=x^2$

$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-2x\,(1+\ln x)}{x^4}=\frac{x-2x-2x\ln x}{x^4}=\frac{-x-2x\ln x}{x^4}=\frac{-1-2\ln x}{x^3}$

b) Résoudre sur $]0\,;+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln x>0$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

$-1-2\ln x>0 \;\Leftrightarrow\; 2\ln x<-1 \;\Leftrightarrow\; \ln x<\frac{-1}{2} \;\Leftrightarrow\; x<e^{\frac{-1}{2}} \;\Leftrightarrow\; x<\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} \;\Leftrightarrow\; x<\frac{1}{\sqrt{e}} \;\Leftrightarrow\; x<\frac{\sqrt{e}}{e}$

$\forall\, x\in\,]0\,;+\infty[,\ f'(x)=\frac{-1-2\ln x}{x^3}$ et $x^3>0$

Donc $f'(x)$ a le même signe que $-1-2\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

On en déduit que $f'(x)$ est strictement positif sur $]0\,;\frac{\sqrt{e}}{e}[$ et strictement négatif sur $]\frac{\sqrt{e}}{e}\,;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

$f(\frac{\sqrt{e}}{e}) = \frac{1+ln(\frac{\sqrt{e}}{e})}{(\frac{\sqrt{e}}{e})^2} = \frac{1+ln(\frac{\sqrt{e}}{e})}{\frac{e}{e^2}} = \frac{e^2}{e}(1+ln(\frac{\sqrt{e}}{e}))$

x	0		$\frac{\sqrt{e}}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e^2}{e}(1+ln(\frac{\sqrt{e}}{e}))$	$\searrow$	0^+

3. a) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

$f(\frac{\sqrt{e}}{e}) = \frac{e^2}{e}(1+ln(\frac{\sqrt{e}}{e})) \approx 1,36 > 0$

La fonction f est continue, strictement croissante et change de signe sur $]0\,;\frac{\sqrt{e}}{e}[$.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x)=0$ admet une unique solution sur $]0\,;\frac{\sqrt{e}}{e}[$.

Sur $]\frac{\sqrt{e}}{e}\,;+\infty[$, $f(x)$ est strictement positive donc l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur $]\frac{\sqrt{e}}{e}\,;+\infty[$.

Finalement, la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses.

$f(x)=0 \iff \frac{1+ln\,x}{x^2}=0 \iff 1+ln\,x=0 \iff ln\,x=-1 \iff x=e^{-1} \iff x=\frac{1}{e}$

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	