Nom :
Prénom :

DS n°8
le 14/05/2018

Classe :
T S …

Les exercices seront traités dans l'ordre de votre choix. La présentation et le soin apportés à la présentation de votre copie rentreront pour une part importante dans sa notation.

Exercice 1 : Etudier une suite définie par une intégrale. **… / 12**

Partie A

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = x + e^{-x}$$

1. Justifier que $\mathscr{C}_1$ passe par le point A$(0\,;1)$.
2. Dresser le tableau des variations de la fonction f_1. On précisera les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

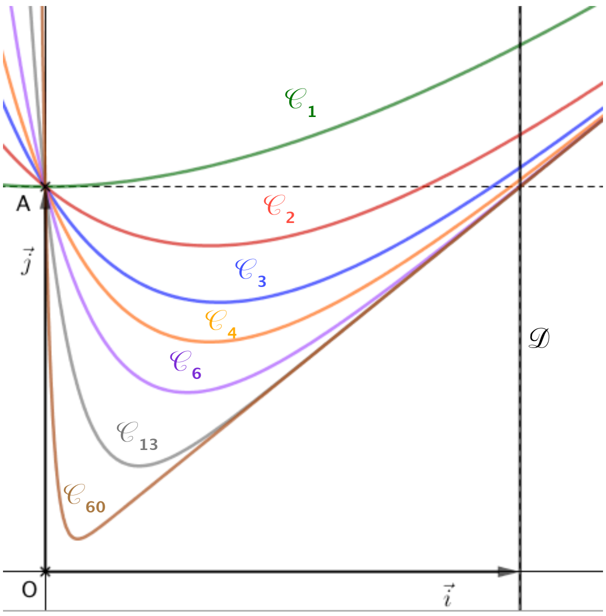
Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n), définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \int_0^1 x + e^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

1. Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i}, \vec{j})$, pour tout nombre entier naturel n, $\mathscr{C}_n$ est la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x + e^{-nx}$$

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathscr{C}_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = 1$.



a) Interpréter géométriquement l'intégrale I_n.

b) Conjecturer, en expliquant le raisonnement, le sens de variations de I_n et sa limite éventuelle.

2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, I_n est positive.

b) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}\,(1 - e^x)\,\mathrm{d}x$$

En déduire le sens de variation et la convergence de la suite (I_n).

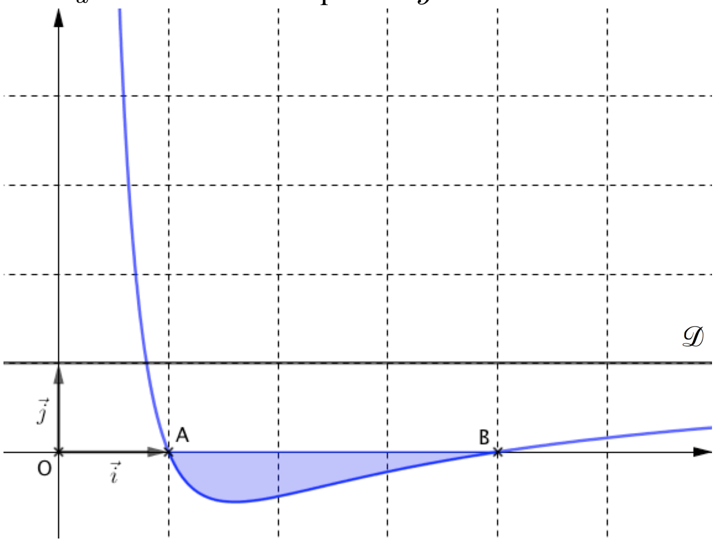
3. Calculer I_n en fonction de n puis déterminer la limite de la suite (I_n).

Exercice 2 : Etudier une aire paramétrée. **… / 8**

Partie A

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, $\mathscr{C}_u$ est la courbe représentative de la fonction u définie sur $]0\,;+\infty[$ par $u(x)\ = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$ où a, b et c sont trois réels fixés.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_u$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$.



On précise que la courbe $\mathscr{C}_u$ passe par les points $A(1;0)$ et $B(4;0)$ et que l'axe des ordonnées et la droite $\mathscr{D}$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_u$.

1. Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.
2. Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$. En déduire la valeur de a.
3. En déduire que, pour tout réel x de $]0;+\infty[$: $u(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$.

Partie B

f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)\ = x - 5\,ln\,x - \frac{4}{x}$.

1. Démontrer que f est une primitive de u sur $]0\,;+\infty[$.
2. Déterminer l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine coloré sur le graphique de la partie A.
3. Pour tout nombre réel λ supérieur ou égal à 4, on note $\mathscr{A}_\lambda$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine formé par les points M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ telles que :

$$4 \leq x \leq \lambda \quad \text{et :} \quad 0 \leq y \leq u(x)$$

Existe-t-il une valeur de λ pour laquelle $\mathscr{A}_\lambda = \mathscr{A}$?

Correction du DS n°8

Exercice 1 : Etudier une suite définie par une intégrale.

Partie A

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = x + e^{-x}$$

1. Justifier que $\mathscr{C}_1$ passe par le point A (0 ; 1).

$f_1(0) = 0 + e^0 = 1$
Donc $\mathscr{C}_1$ passe par le point A (0 ; 1).

2. Dresser le tableau des variations de la fonction f_1. On précisera les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = x + e^{-x}$ et : $f_1'(x) = 1 - e^{-x}$

Etude du signe de la dérivée :
$f_1'(x) > 0 \iff 1 - e^{-x} > 0 \iff 1 > e^{-x} \iff -x < ln(1) \iff x > 0$
De plus : $f_1'(x) = 0 \iff x = 0$

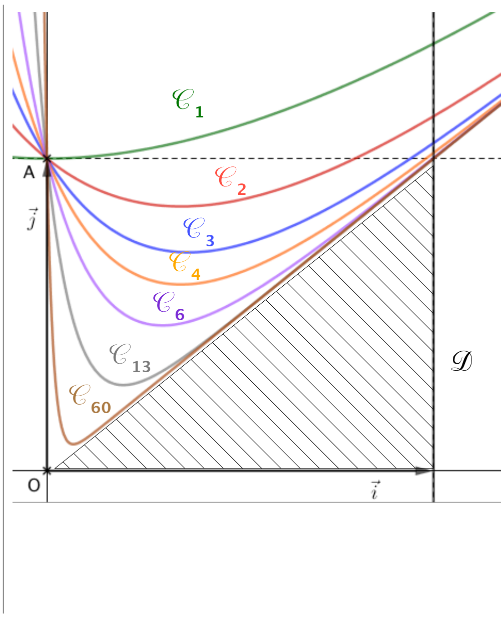
Détermination de la limite en $-\infty$:
$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = x + e^{-x} = e^{-x}\,(1 - \frac{-x}{e^{-x}})$
$\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ et : $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ On en déduit, par composée de limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$
De plus : $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ Donc, par inverse : $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$. On en déduit, par composée : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x}{e^{-x}} = 0$.
Finalement, par somme puis produit : $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - \frac{-x}{e^{-x}}) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = +\infty$

Détermination de la limite en $+\infty$:
$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = x + e^{-x}$
Par composée de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ donc, par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

On en déduit le tableau de variations de f_1 :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Partie B



L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n), définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^1 x + e^{-nx}\,\mathrm{d}x$$

1. Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$, pour tout nombre entier naturel n, $\mathscr{C}_n$ est la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x + e^{-nx}$$

Sur le graphique ci-contre on a tracé la courbe $\mathscr{C}_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = 1$.

a) Interpréter géométriquement l'intégrale I_n.

Graphiquement, quel que soit l'entier n, la fonction f_n semble positive sur [0 ; 1] donc I_n est l'aire du domaine situé entre la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

b) Conjecturer, en expliquant le raisonnement, le sens de variations de I_n et sa limite éventuelle.

Plus n augmente, plus le domaine situé entre la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ a une surface qui diminue et semble se rapprocher du triangle hachuré sur la figure précédente.
Ce triangle a une aire égale à $\frac{1}{2}$u.a. Donc I_n semble être décroissante et convergente vers $\frac{1}{2}$.

2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, I_n est positive.

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + e^{-nx}$
$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, on a : $e^{-nx} > 0$
De plus, $\forall\ x \in [0\ ;1]$, on a : $x \geq 0$. On en déduit que f_n est positive sur $[0\ ;1]$.
Or : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Donc : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, I_n est positive.

b) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}\,(1 - e^{x})\,\mathrm{d}x$$

En déduire le sens de variation et la convergence de la suite (I_n).

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x + e^{-(n+1)x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x + e^{-nx}\,\mathrm{d}x$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x + e^{-(n+1)x} - x - e^{-nx}\,\mathrm{d}x$$
$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x} - e^{-nx}\,\mathrm{d}x$$
$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}\,\left(1 - \frac{e^{-nx}}{e^{-(n+1)x}}\right)\mathrm{d}x$$
$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}\,\left(1 - \frac{e^{-nx}}{e^{-nx-x}}\right)\mathrm{d}x$$
$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}\,(1 - e^{-nx+nx+x})\,\mathrm{d}x$$
$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}\,(1 - e^{x})\,\mathrm{d}x$$

$\forall\ x \in [0\ ;1]$, on a : $e^0 \leq e^x \leq e^1 \iff 1 \leq e^x \leq e$ On en déduit : $1 - e \leq 1 - e^x \leq 0$
De plus, $\forall\ x \in [0\ ;1]$, $e^{-(n+1)x} > 0$
Donc : $\forall\ x \in [0\ ;1]$, $e^{-(n+1)x}\,(1 - e^{x})\,\mathrm{d}x \leq 0$
On en déduit : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n \leq 0 \iff I_{n+1} \leq I_n$
Ainsi, la suite (I_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.
On a montré à la question a) que la suite (I_n) est positive sur $\mathbb{N}$, on en déduit qu'elle est minorée par 0.
Enfin, une suite décroissante et minorée converge donc (I_n) converge vers un réel $\ell \geq 0$.

3. Calculer I_n en fonction de n puis déterminer la limite de la suite (I_n).

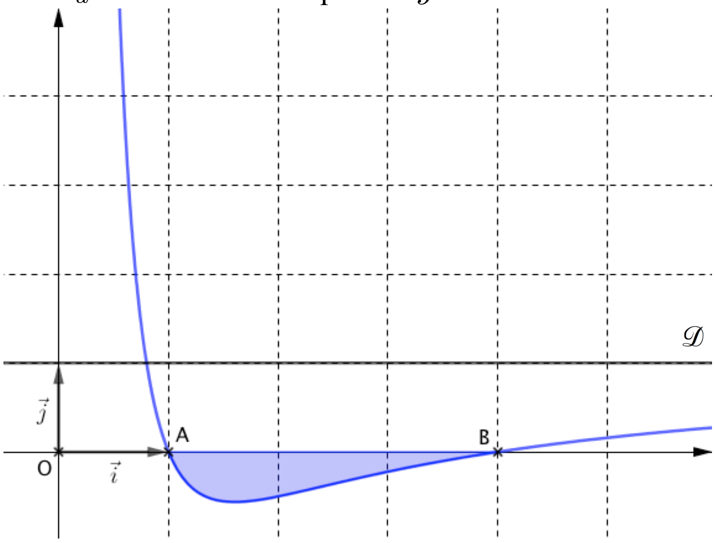
$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 x + e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$
On définit une primitive de f_n sur $[0\ ;1]$ par : $F_n(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{n}e^{-nx}$
Ainsi : $I_n = [\frac{x^2}{2} - \frac{1}{n}e^{-nx}]_0^1 = F_n(1) - F_n(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}e^{-n} - \frac{0}{2} + \frac{1}{n}e^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{n\,e^n} + \frac{1}{n}$
$\lim\limits_{n \to +\infty} n\,e^n = +\infty$ Donc, par inverse de limite : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n\,e^n} = 0$
De plus : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Donc, par somme de limites : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{n\,e^n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$
Ainsi, la suite (I_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 2 : Etudier une aire paramétrée.

Partie A

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, $\mathscr{C}_u$ est la courbe représentative de la fonction u définie sur $]0\,;+\infty[$ par $u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$ où a, b et c sont trois réels fixés.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_u$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$.



On précise que la courbe $\mathscr{C}_u$ passe par les points $A(1;0)$ et $B(4;0)$ et que l'axe des ordonnées et la droite $\mathscr{D}$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_u$.

1. Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.

La courbe $\mathscr{C}_u$ passe par les points $A(1;0)$ et $B(4;0)$ donc $u(1) = u(4) = 0$.

2. Donner $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$. En déduire la valeur de a.

La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_u$ en $+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 1$.

Or : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{b}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{c}{x^2} = 0$ Donc, par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = a$

On en déduit, par identification : $a = 1$.

3. En déduire que, pour tout réel x de $]0;+\infty[$: $u(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2}$.

$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $u(x) = 1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$

$u(1) = 0$ donc : $1 + b + c = 0$

$u(4) = 0$ donc : $1 + \frac{b}{4} + \frac{c}{16} = 0 \iff \frac{16+4b+c}{16} = 0 \iff 16 + 4b + c = 0$

Ainsi, les réels b et c sont solutions du système : $\begin{cases} 1 + b + c = 0 \\ 16 + 4b + c = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} b + c = \text{-}1 \\ 4b + c = \text{-}16 \end{cases} \iff \begin{cases} b + c = \text{-}1 \\ 3b = \text{-}15 \end{cases} \iff \begin{cases} b + c = \text{-}1 \\ b = \text{-}5 \end{cases} \iff \begin{cases} c = \text{-}1 + 5 \\ b = \text{-}5 \end{cases} \iff \begin{cases} b = \text{-}5 \\ c = 4 \end{cases}$

Finalement : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $u(x) = 1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-5x+4}{x^2}$

Partie B

f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x - 5\ln x - \frac{4}{x}$.

1. Démontrer que f est une primitive de u sur $]0\,;+\infty[$.

$\forall\ x \in]0\,;+\infty[$, $f(x) = x - 5\ln x - \frac{4}{x}$.

$f'(x) = 1 - 5 \times \frac{1}{x} - 4 \times \frac{\text{-}1}{x^2} = 1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} = u(x)$

Donc f est une primitive de u sur $]0\,;+\infty[$.

2. Déterminer l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine coloré sur le graphique de la partie A.

Justifions que u est négative sur $[1\,;\,4]$.
$\forall\ x \in]0\,;+\infty[$, $u(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2}$
On considère le trinôme $x^2 - 5x + 4$
$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9$
On en déduit deux racines distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-\sqrt{9}}{2} = 1$ et : $x_1 = \frac{5+\sqrt{9}}{2} = 4$
Le trinôme est négatif (du signe contraire de a) entre ses racines.
$\forall\ x \in]0\,;+\infty[$, $x^2 > 0$ et $\forall\ x \in [1\,;\,4]$, $x^2 - 5x + 4 \leq 0$.
On en déduit : $\forall\ x \in [1\,;\,4]$, $u(x) \leq 0$ donc :
$\mathscr{A}$ = - $\int_1^4 u(x)\,\mathrm{d}x$ = - $[f(x)]_1^4$ = - $f(4) + f(1)$ = $-4 + 5\,ln\,4 + \frac{4}{4} + 1 - 5\,ln\,1 - \frac{4}{1} = -6 + 5\,ln\,4$

3. Pour tout nombre réel λ supérieur ou égal à 4, on note $\mathscr{A}_\lambda$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine formé par les points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ telles que :

$$4 \leq x \leq \lambda \quad \text{et :} \quad 0 \leq y \leq u(x)$$

Existe-t-il une valeur de λ pour laquelle $\mathscr{A}_\lambda = \mathscr{A}$?

$\forall\ x \in]4\,;+\infty[$, $u(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2}$ donc
$\mathscr{A}_\lambda = \int_4^\lambda u(x)\,\mathrm{d}x = f(\lambda) - f(4)$
On cherche s'il existe une valeur de λ pour laquelle $\mathscr{A}_\lambda = \mathscr{A}$, c'est-à-dire : $f(\lambda) - f(4)$ = - $f(4) + f(1)$
C'est-à-dire : $f(\lambda) = -3$
Or, on sait que $f' = u$ et que u est strictement positive sur $]4\,;+\infty[$.
On en déduit que f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]4\,;+\infty[$.
$f(4) = 3 - 5\,ln(4) \approx -3,93$
$f(x) = x - 5\,ln\,x - \frac{4}{x} = x\,(1 - 5\frac{ln\,x}{x} - \frac{4}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln\,x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x^2} = 0$. Donc, par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 - 5\frac{ln\,x}{x} - \frac{4}{x^2}) = 1$
On en déduit, par produit de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
Finalement, puisque :

- f est continue et strictement croissante sur $]4\,;+\infty[$.
- $f(x)$ prend ses valeurs dans $]3 - 5\,ln(4)\,;+\infty[$ avec $3 - 5\,ln(4) \approx -3,93$
- $-3 \in]3 - 5\,ln(4)\,;+\infty[$

Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(\lambda) = -3$ admet une unique solution sur l'intervalle $]4\,;+\infty[$. Ainsi, il existe une valeur de λ pour laquelle $\mathscr{A}_\lambda = \mathscr{A}$.