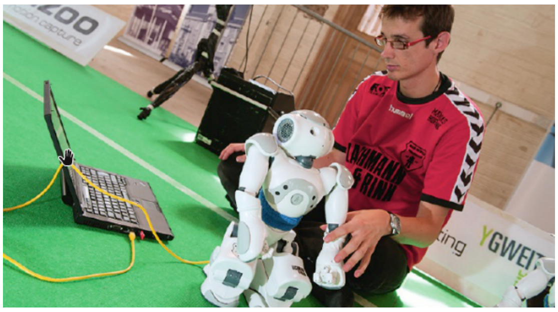
Nom :
Prénom :

DS n°9
le 24/05/2018

Classe :
T S …

Les exercices seront traités dans l'ordre de votre choix. La présentation et le soin apportés à la présentation de votre copie rentreront pour une part importante dans sa notation.

Exercice 1 : **… / 4,5**



La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à : $P(X < t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

1. Déterminer λ à 10^{-1} près, pour que la probabilité $P(X > 6)$ soit égale à $0,3$.
   Pour la suite de l'exercice on prendra $\lambda = 0,2$.
2. A quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de $0,5$?
3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $e^{-0,4}$
4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de 6 ans ?
5. On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante. Déterminer, à 10^{-2} près, la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne les six premières années.

Exercice 2 : Produire et conditionner. **… / 5,5**

Partie A : Production de fraises

Un maraîcher produit ses fraises dans deux serres notées A et B.
55 % des fleurs de fraisiers se trouvent dans la serre A et 45 % dans la serre B. De plus, dans la serre A, la probabilité que chaque fleur donne un fruit est égale à $0,88$ tandis que dans la serre B elle est égale à $0,84$.

1. Justifier que la probabilité qu'une fleur de fraisier choisie au hasard dans cette exploitation donne un fruit est égale à $0,862$.
2. On constate qu'une fleur choisie au hasard dans l'exploitation donne un fruit. Déterminer la probabilité qu'elle soit située dans la serre A. Arrondir le résultat au millième.

Partie B : Conditionnement des fraises

Les fraises sont conditionnées en barquettes. La masse (en grammes) d'une barquette peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type σ.

1. On donne $P(X \leq 237) = 0,14$.
   Calculer la probabilité que la masse de la barquette soit comprise entre 237 et 250 grammes.
2. On pose $Y = \frac{X-250}{\sigma}$.

   a) Quelle est la loi de probabilité suivie par Y ?

   b) Démontrer que $P(Y \leq \frac{-13}{\sigma}) = 0,14$.

   c) En déduire l'arrondi à l'unité de σ.
3. Dans cette question on admet que $\sigma = 12$. On désigne par n un nombre entier naturel.
   Une barquette est conforme si sa masse, en grammes, appartient à l'intervalle $[250 - n\,;\,250 + n]$.
   Déterminer la plus petite valeur de n pour que la barquette soit conforme avec une probabilité supérieure à 95 %.

Correction du DS n°9

Exercice 1 :

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à : $P(X < t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx$.

1. Déterminer λ à 10^{-1} près, pour que la probabilité $P(X > 6)$ soit égale à $0,3$.
   Pour la suite de l'exercice on prendra $\lambda = 0,2$.

$P(X > 6) = 0,3 \Leftrightarrow 1 - P(X \leq 6) = 0,3 \Leftrightarrow 1 - \int_0^6 \lambda e^{-\lambda x}\, dx = 0,3 \Leftrightarrow 1 - [-e^{-\lambda x}]_0^6 = 0,3$

$P(X > 6) = 0,3 \Leftrightarrow 1 + e^{-6\lambda} - e^0 = 0,3 \Leftrightarrow 1 + e^{-6\lambda} - 1 = 0,3 \Leftrightarrow e^{-6\lambda} = 0,3 \Leftrightarrow -6\lambda = ln(0,3)$

$P(X > 6) = 0,3 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-ln(0,3)}{6} \approx 0,2$

2. A quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de $0,5$?

$\forall\, t \in [0 ; +\infty[,\ P(X \geq t) = e^{-\lambda t} = e^{-0,2t}$

Pour déterminer à que instant t la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est de $0,5$ on résout : $P(X \geq t) = 0,5 \Leftrightarrow e^{-0,2t} = 0,5 \Leftrightarrow -0,2t = ln(0,5) \Leftrightarrow t = \frac{-ln(0,5)}{0,2} \approx 3,5$

t est exprimé en années. On en déduit que c'est au bout de 3 ans et 6 mois, à un mois près, que la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est de $0,5$.

3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $e^{-0,4}$

$\forall\, t \in [0 ; +\infty[,\ P(X > t) = e^{-\lambda t} = e^{-0,2t}$

Donc : $P(X > 2) = e^{-0,2\times 2} = e^{-0,4}$

4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de 6 ans ?

D'après la propriété de la durée de vie sans vieillissement on a :

$P_{(X>2)}(X > 6) = P_{(X>2)}(X > 2 + 4) = P(X > 4) = e^{-0,2\times 4} = e^{-0,8} \approx 0,45$

Ainsi, sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de 6 ans est d'environ $0,45$.

5. On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante. Déterminer, à 10^{-2} près, la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne les six premières années.

Observer si un robot n'a pas eu de panne au cours des six premières années est une épreuve de Bernoulli car il n'y a que deux issues possibles : S et $\overline{S}$.

On note : S « le robot observé n'a pas eu de panne au cours des deux premières années ».

$P(S) = P(X > 6) = 0,3$

On répète cette expérience 10 fois dans des conditions d'indépendance et on obtient un schéma de Bernoulli.

Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de robots qui n'ont pas eu de panne au cours des deux premières années. Y prend des valeurs entières entre 0 et 10 en suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(10 ; 0,3)$.

$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0,3^0 (1 - 0,3)^{10} = 1 - 0,7^{10} \approx 0,97$

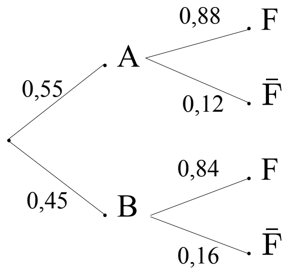
Exercice 2 : Produire et conditionner.

Partie A : Production de fraises

Un maraîcher produit ses fraises dans deux serres notées A et B.
55 % des fleurs de fraisiers se trouvent dans la serre A et 45 % dans la serre B. De plus, dans la serre A, la probabilité que chaque fleur donne un fruit est égale à $0,88$ tandis que dans la serre B elle est égale à $0,84$.

1. Justifier que la probabilité qu'une fleur de fraisier choisie au hasard dans cette exploitation donne un fruit est égale à $0,862$.

On peut modéliser la situation à l'aide de l'arbre pondéré suivant :



On note :
A : « La fleur de fraisier provient de la serre A »
B : « La fleur de fraisier provient de la serre B »
F : « La fleur de fraisier donne un fruit »
$\bar{F}$: « La fleur de fraisier ne donne pas de fruit »

$P(F) = P(A \cap F) + P(B \cap F)$
$P(F) = P(A) \times P_A(F) + P(B) \times P_B(F) = 0,55 \times 0,88 + 0,45 \times 0,84 = 0,862$

2. On constate qu'une fleur choisie au hasard dans l'exploitation donne un fruit. Déterminer la probabilité qu'elle soit située dans la serre A. Arrondir le résultat au millième.

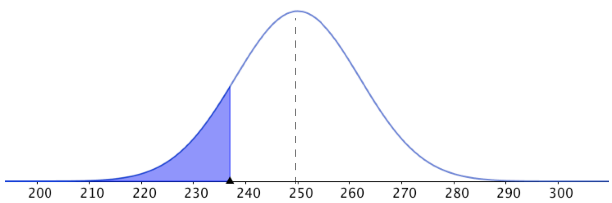
$P_F(A) = \dfrac{P(A \cap F)}{p(F)} = \dfrac{0,55 \times 0,88}{0,862} \approx 0,561$
Sachant qu'on a choisi au hasard une fleur qui a donné un fruit, la probabilité qu'elle provienne de la serre A est d'environ $0,561$.

Partie B : Conditionnement des fraises

Les fraises sont conditionnées en barquettes. La masse (en grammes) d'une barquette peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type σ.

1. On donne $P(X \leq 237) = 0,14$.
Calculer la probabilité que la masse de la barquette soit comprise entre 237 et 250 grammes.

Si X suit une loi normale d'espérance $\mu = 250$ alors :
$P(X \leq 250) = 0,5$.
De plus, on sait que $P(X \leq 237) = 0,14$.
On en déduit :
$P(237 \leq X \leq 250) = 0,5 - P(X \leq 237) = 0,36$



2. On pose $Y = \dfrac{X-250}{\sigma}$.
a) Quelle est la loi de probabilité suivie par Y ?

On pose $Y = \dfrac{X-250}{\sigma}$.
X suit une loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type σ donc Y suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

b) Démontrer que $P(Y \leq \dfrac{-13}{\sigma}) = 0,14$.

On sait que : $P(X \leq 237) = 0,14$
On en déduit : $P(\dfrac{X-250}{\sigma} \leq \dfrac{237-250}{\sigma}) = 0,14 \quad \Leftrightarrow \quad P(Y \leq \dfrac{-13}{\sigma}) = 0,14$

c) En déduire l'arrondi à l'unité de σ.

Y suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ et $P(Y \leq \dfrac{-13}{\sigma}) = 0,14$
La calculatrice permet d'obtenir : $\dfrac{-13}{\sigma} \approx -1,08$. On en déduit : $\sigma \approx \dfrac{13}{1,08} \approx 12$

3. Dans cette question on admet que $\sigma = 12$. On désigne par n un nombre entier naturel.
   Une barquette est conforme si sa masse, en grammes, appartient à l'intervalle $[250 - n\ ;\ 250 + n]$.
   Déterminer la plus petite valeur de n pour que la barquette soit conforme avec une probabilité supérieure à 95 %.

On sait que X suit une loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type $\sigma = 12$.
et que $\mathrm{P}(\mu - 2\sigma \leq \mathrm{X} \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$
On cherche le plus petit entier n tel que $\mathrm{P}(250 - n \leq \mathrm{X} \leq 250 + n) = 0,95$
On en déduit $n = 2\sigma = 24$