Série S **Le lundi 6 mars 2017**

Durée de l'épreuve : 4h

Bac blanc de Mathématiques

-Enseignement spécifique-

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4

<u>Exercice n°1</u> : (4 points)

Un plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$; $\vec{v}$).On prendra 2 cm pour unité graphique. On appelle J le point d'affixe i.

1. On considère les points A, B, C et H d'affixes respectives a= -3− i, b= -2 +4i, c = 3− i et h = -2. Placer ces points sur une figure, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2. Montrer que le point J est le centre du cercle *C* circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon du cercle *C*.
3. a. Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes z_1 , z_2 et Z définis par :
   $$z_1 = b - c \text{ et } z_2 = h - a \text{ puis } Z = \frac{z_1}{z_2}$$
   En déduire que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

   b. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   En déduire que les droites (BH) et (AC) sont perpendiculaires.

   c. Que représente le point H dans le triangle ABC ?
4. On note G le centre de gravité du triangle ABC défini par l'égalité vectorielle
   $$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$
   Déterminer l'affixe g du point G.
5. Montrer que le centre de gravité G du triangle ABC, le point J centre du cercle circonscrit au triangle ABC et le point H sont alignés. Le vérifier sur la figure.

<u>Exercice n°2</u> : (5 points)

Partie A

Cette partie est un questionnaire à choix multiples constitué de trois questions indépendantes. Pour chacune d'elles, une seule des quatre propositions est exacte.
Aucune justification n'est demandée. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, sinon zéro.

Question1 : Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0,3.
On effectue n tirs supposés indépendants. On désigne par p_n la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces n tirs.
La valeur minimale de n pour que p_n soit supérieur ou égale à 0,9 est :

a. 6 **b.** 7 **c.** 10 **d.** 12

Question 2 : Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
A chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4,5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.
Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.
La probabilité pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est :

a. $\frac{125}{3888}$ **b.** $\frac{625}{648}$ **c.** $\frac{25}{7776}$ **d.** $\frac{3}{5}$

Question3 : Soient A et B deux événements indépendants d'un même univers Ω tels que
P(A) = 0,3 et p(A∪B) = 0,65.La probabilité de l'événement B est égale à :

a. 0,5 **b.** 0,35 **c.** 0,46 **d.** 0,7

Partie B

Dans cette partie vous indiquerez si l'affirmation qui est donnée est vraie ou fausse. Vous justifierez d'une manière claire et détaillée votre réponse. Toutes les démarches permettant d'aboutir à la réponse seront valorisées.

Dans un pays, il y a 2% de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0, 99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test)

On fait passer le test à une personne choisie au hasard dans cette population. On affirme la phrase suivante :
« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40% de « chance » que la personne soit contaminée ».
Qu'en pensez-vous ?

Exercice n°3 : (5 points)

Partie A :

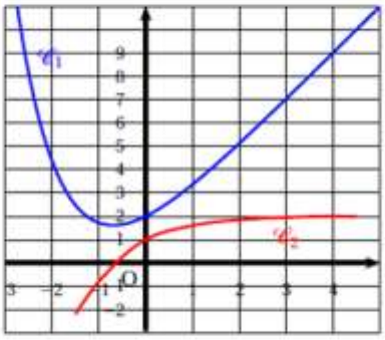
f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. f' est la fonction dérivée de la fonction f.

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme C_1 la courbe représentative de la fonction f et C_2 la courbe représentative de la fonction f'. Le point A de coordonnées (0 ; 2) appartient à la courbe C_1.

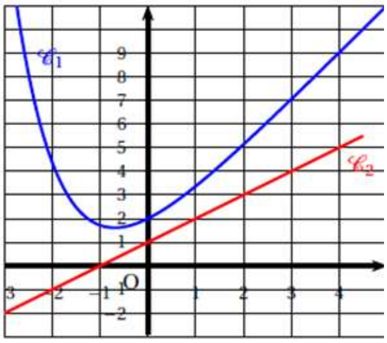
Le point B de coordonnées (0 ; 1) appartient à la courbe C_2.

1. Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative C_1 de la fonction f. Sur l'une d'entre elles, la courbe C_2 de la fonction dérivée f' est tracée convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.

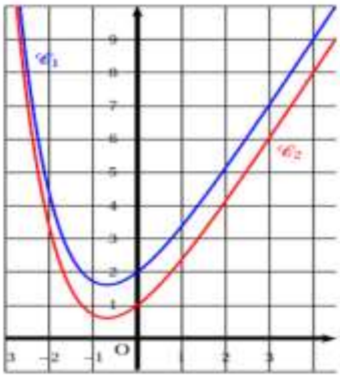
Situation 1



Situation 2 ($\mathscr{C}_2$ est une droite)



Situation 3



2. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe C_1 en A
3. On sait que pour tout réel x, $f(x) = e^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.
   a. Déterminer la valeur de b en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.
   b. Prouver que $a = 2$.
4. a. Construire le tableau des variations de la fonction dérivée f' .
   b. Montrer que la fonction f' s'annule en un réel α unique sur $\mathbb{R}$ .Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2}près .En déduire le signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}$
5. Déterminer le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (x + 2)$.

1. a. Montrer que la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.
   b. En déduire la position de la courbe C_1 par rapport à la droite Δ.

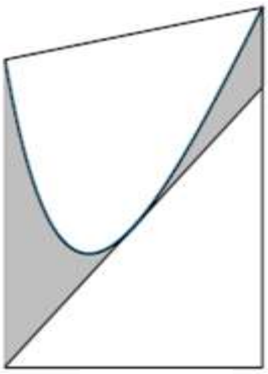


Figure 2

La figure 2 ci-contre représente le logo d'une entreprise. Pour dessiner ce logo, son créateur s'est servi de la courbe C_1 et de la droite Δ comme l'indique la figure 3. Afin d'estimer les coûts de peinture, il souhaite déterminer l'aire de la partie colorée en gris située entre la droite Δ, et la courbe C_1 . Le contour du logo est représenté par le trapèze DEFG où :

D (-2 ; 0), E (2 ; 0), F et G sont deux points de C_1 d'abscisses respectives 2 et -2.

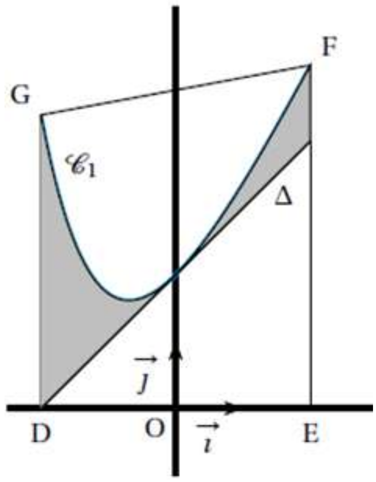
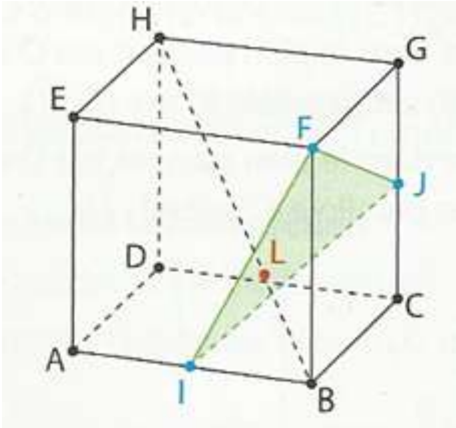


Figure 3

2. Soit G la fonction définie par $G(x) = -e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x$.
   a. Calculer $G'(x)$.Que représente la fonction G pour la fonction g?
   b. Calculer en unités d'aire, l'aire de la partie colorée en gris .On donnera la partie exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} près du résultat. On admettra que l'aire est égale à G(2) − G(-2) unités d'aire.

Exercice n°4 : (3 points)

ABCDEFGH est un cube. I et J sont les milieux des segments [AB] et [CG]



1. les droites (BH) et (IJ) sont-elles sécantes ?
2. a. Justifier que (A ; $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{AE}$) est un repère orthonormé de l'espace.
   b. Donner les coordonnées des points de la figure.
3. Soit L le point d'intersection du plan (FIJ) et de la droite (BH).
   a. Justifier qu'il existe deux réels h et k tels que :
   $$\overrightarrow{FL} = h\overrightarrow{FI} + k\overrightarrow{FJ}$$
   b. En déduire que les coordonnées (x ; y ; z) du point L vérifient
   $x = 1 - \frac{h}{2}$, $y = k$ et $z = 1 - h - \frac{k}{2}$
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BH) puis en déduire les coordonnées du point L.
4. a. Justifier que les droites (FL) et (IJ) sont sécantes et déterminer les coordonnées du point P, intersection de ces deux droites.
   b. Déterminer la position du point P sur le segment [IJ]

Exercice n°5 : (3 points)

Soit U la suite définie par : $u_0 = 2$ et pour tout nombre entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{u_n - 1}$$

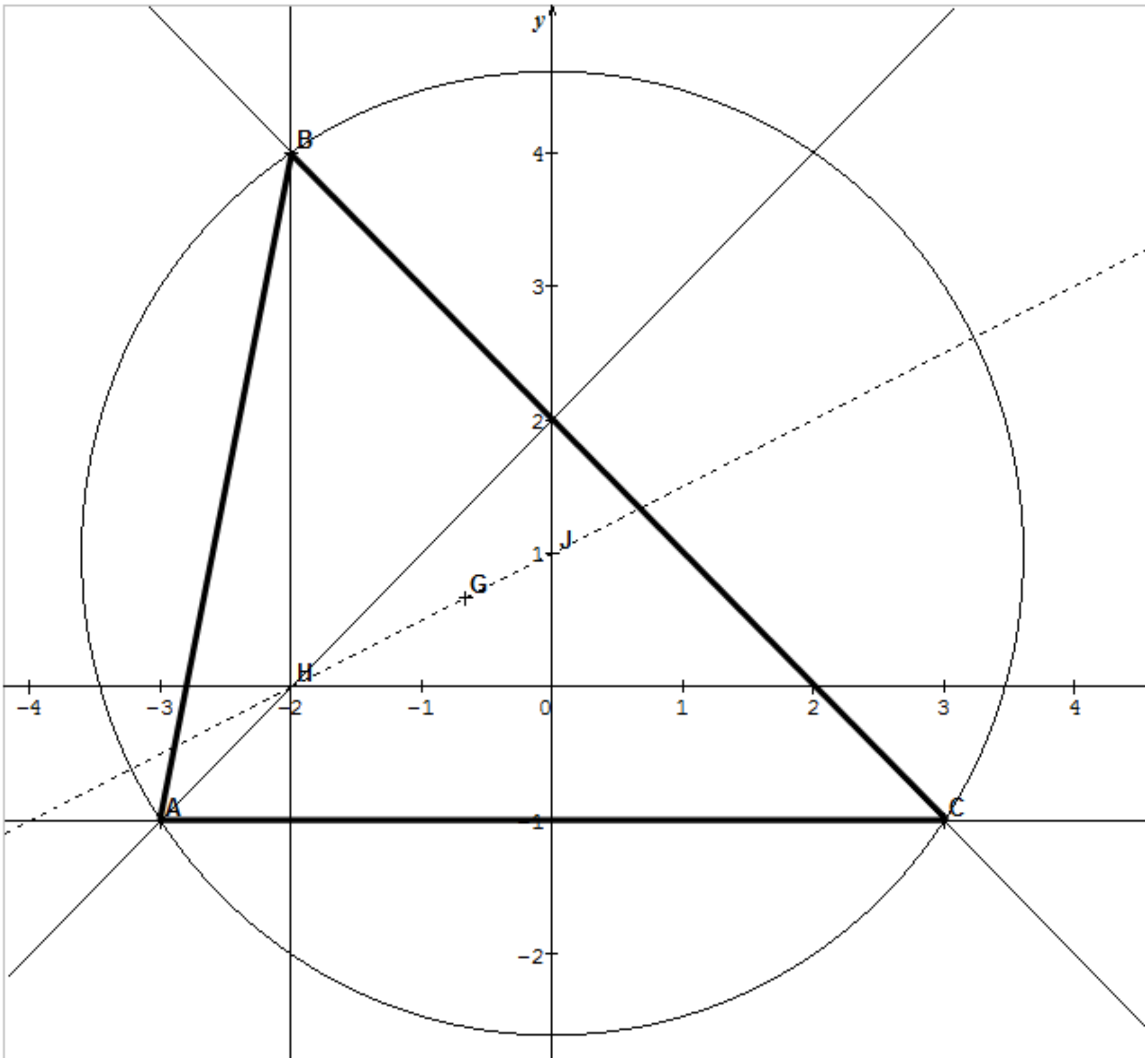
a. Démontrer que la suite U est minorée par 2.
b. Déterminer le sens de variation de U.
c. Démontrer que la suite U ne peut converger vers aucun nombre réel ℓ.
d. Démontrer, en raisonnant par l'absurde que U n'est jamais majorée.
   En déduire la limite de la suite U

Corrigé bac blanc mars 2017

Exercice n°1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$; $\vec{v}$).On prendra 2 cm pour unité graphique.
On appelle J le point d'affixe i.

1. On considère les points A, B, C et H d'affixes respectives : a = -3 − i, b = -2 + 4i, c = 3 − i et h = -2.



Montrer que le point J est le centre du cercle *C* circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon du cercle *C*.

JA $=|a-i|=|-3-i-i|=|-3-2i|=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

JB $=|b-i|=|-2+4i-i|=|-2+3i|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

JC $=|c-i|=|3-i-i|=|3-2i|=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

Donc les points A, B et C sont situés sur le cercle de centre J et de rayon $\sqrt{13}$

2. a. Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes z_1 , z_2 et Z définis par :

$$z_1 = b - c \text{ et } z_2 = h - a \text{ puis } Z = \frac{z_1}{z_2}$$

- $z_1 = b - c = -2 + 4i - (3 - i) = -5 + 5i$. $|z_1| = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos(\theta_1) = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_1) = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ donc } \theta_1 = \frac{3\pi}{4} \quad \text{donc } z_1 = 5\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

- $z_2 = h - a = -2 - (-3 - i) = 1 + i \qquad |z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\begin{cases} \cos(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ donc $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

- $Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{5\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$

En déduire que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{b-c}{h-a} = \frac{z_{\overrightarrow{CB}}}{z_{\overrightarrow{AH}}}$. or $(\overrightarrow{AH} ; \overrightarrow{CB}) = \arg(Z) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux donc les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

b. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$z_{\overrightarrow{BH}} = h - b = -2 - (-2 + 4i) = -4i$ donc $\overrightarrow{BH}\binom{0}{-4}$

$z_{\overrightarrow{AC}} = c - a = 3 - i - (-3 - i) = 6$ donc $\overrightarrow{AC}\binom{6}{0}$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O , \vec{u} ; \vec{v})$.

$\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{BH} = xx' + yy' = 0\text{x}6 + (-4)\text{x}0 = 0$

donc les droites (BH) et (AC) sont perpendiculaires.

c. Que représente le point H dans le triangle ABC ?

Dans le triangle ABC (AH) est perpendiculaire à (BC) donc (AH) est la hauteur issue de A

(BH) est perpendiculaire à (AC) donc (BH) est la hauteur issue de B.

Donc (AH) et (BH) sont deux hauteurs du triangle ABC. Elles sont sécantes en H appelé **orthocentre** du triangle ABC

4. On note G le centre de gravité du triangle ABC défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$ donc $z_G = \frac{-3-i-2+4i+3-i}{3} = \frac{-2+2i}{3} = \frac{-2}{3} + \frac{2}{3}i$

Ou bien $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{GA}} + z_{\overrightarrow{GB}} + z_{\overrightarrow{GC}} = 0 \Leftrightarrow (a - z_G) + (b - z_G) + (c - z_G) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 3z_G$

$\Leftrightarrow -3-i-2+4i+3-i = 3z_G \Leftrightarrow -2+2i = 3z_G \Leftrightarrow z_G = \frac{-2}{3} + \frac{2}{3}i$

5. Montrer que le centre de gravité G du triangle ABC, le point J centre du cercle circonscrit au triangle ABC et le point H sont alignés.

$\left.\begin{array}{l} z_{\overrightarrow{JG}} = \frac{-2}{3} + \frac{2}{3}i - i = \frac{-2}{3} - \frac{1}{3}i \\ z_{\overrightarrow{JH}} = -2 - i \end{array}\right\}$ $z_{\overrightarrow{JG}} = \frac{1}{3} z_{\overrightarrow{JH}}$ donc $\overrightarrow{JG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JH}$ et les vecteurs $\overrightarrow{JG}$ et $\overrightarrow{JH}$ sont colinéaires avec le point J en commun. Donc les points G**,** J et H sont alignés

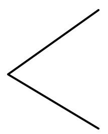
<u>Exercice n°2</u> :

Partie A

Question1 : **Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0,3. On effectue n tirs supposés indépendants. On désigne par p_n la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces n tirs**.

On considère la variable aléatoire X_n comptant le nombre de fois que la cible est atteinte au cours des n tirs.

Soit l'épreuve initiale à deux issues :



S S : « La cible est atteinte » p=p(S) =0,3

$\overline{S}$

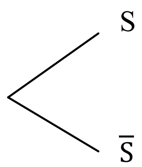
On renouvelle l'épreuve initiale n fois de manière identique et indépendante. Donc X_n suit une loi binomiale de paramètres $\mathcal{B}(n ; 0,3)$.

$p_n = p(X_n \geq 1) = 1 - p(X_n \leq 0) = 1 - p(X_n = 0) = 1 - \binom{n}{0}p^0(1-p)^n = 1 - 0,7^n$

En utilisant la calculatrice la valeur minimale de n pour que p_n soit supérieur ou égale à 0,9 est 7. **Réponse b.**

Question 2 : Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
A chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4,5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.
Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.
La probabilité pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est :

On considère la variable aléatoire X comptant le nombre de fois que le joueur perd au cours des 5 lancers.
Soit l'épreuve initiale à deux issues :



S : « Le joueur a perdu au cours d'un lancer ». $p = p(S) = \frac{1}{6}$

On renouvelle l'épreuve initiale 5 fois de manière identique et indépendante. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $\mathcal{B}(5\,;\frac{1}{6})$. $P(X=3) = \binom{5}{3}(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^2 = 10\text{x}\frac{1}{216}\text{x}\frac{25}{36} = \frac{125}{3888}$. **Réponse a.**

Question3 : Soient A et B deux événements indépendants d'un même univers Ω tels que
P(A) = 0,3 et p(A∪B) = 0,65.La probabilité de l'événement B est égale à :

P (A∪B) =p(A) + p(B) – p(A∩B). Or A et B sont indépendants donc p(A∩B) = p(A)xp(B)

Donc P (A∪B) =p(A) + p(B) – p(A)xp(B) ⇔0,65= 0,3+p(B) – 0,3xp(B) ⇔0,35= 0,7xp(B)⇔p(B) $=\frac{0,35}{0,7}$ =0.5

Réponse a.

Partie B

Dans un pays, il y a 2% de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

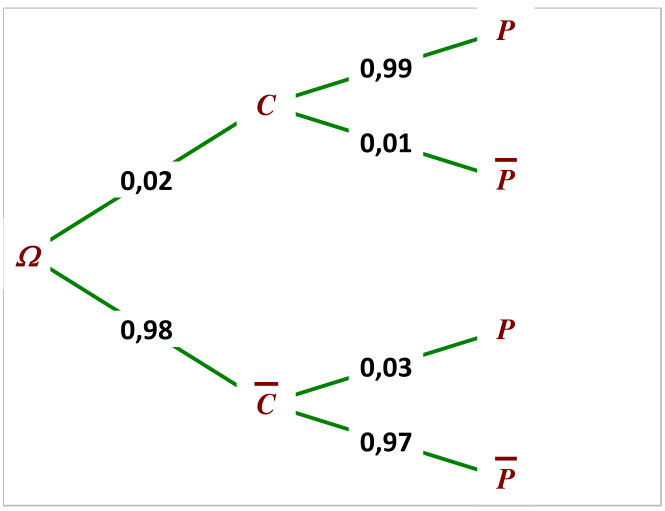
- **La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0, 99 (sensibilité du test).**
- **La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test)**

On fait passer le test à une personne choisie au hasard dans cette population. On affirme la phrase suivante :

« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40% de « chance » que la personne soit contaminée ».

Qu'en pensez-vous ?

Soit C l'événement « la personne est contaminée »
Soit P l'événement « le test est positif »
Représentons la situation à l'aide d'un arbre de probabilité



Nous devons déterminer la probabilité que la personne est contaminée sachant que le test est positif soit, $p_P(C)$.

$p_P(C) = \frac{p(C\cap P)}{p(P)}$

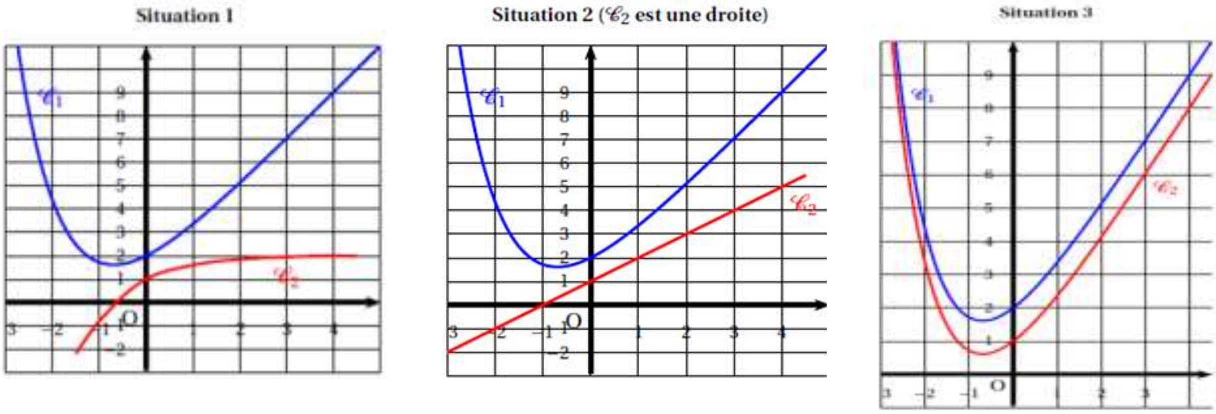
- $P(C\cap P) = p(C)\text{x}p_C(P) = 0{,}02\text{x}0{,}99 = 0{,}0198$
- $P(P) = p(C\cap P) + p(\overline{C}\cap P)$
  $= 0{,}0198 + p(\overline{C})\text{x}p_{\overline{C}}(P)$
  $= 0{,}0198 + 0{,}98\text{x}0{,}03$
  $= 0{,}0492$
- $p_P(C) = \frac{p(C\cap P)}{p(P)} = \frac{0{,}0198}{0{,}0492} \approx 0{,}40244 \approx 40{,}2\%$

On peut considérer que l'affirmation est vraie

Exercice n°3 :

Partie A :

1. Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative C_1 de la fonction f. Sur l'une d'entre elles, la courbe C_2 de la fonction dérivée f' est tracée convenablement. Laquelle ?
Expliquer le choix effectué.



- D'après les graphiques la fonction f est décroissante puis croissante, donc la fonction dérivée f' est négative puis positive .Donc la situation 3 est éliminée.
- De plus la fonction f admet un minimum en un réel β appartenant à l'intervalle]-1 ; 0[, donc f'(x) change de signe en β .Dans la situation 2 la fonction dérivée s'annule en changeant de signe en -1. Or β≠-1 donc la situation 2 est éliminée.
- **Conclusion** : Dans la situation 1 la courbe C_2est tracée convenablement.

2. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe C_1 en A.

Δ a une équation réduite de la forme : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Or le point A de coordonnées (0 ; 2) appartient à la courbe C_1 donc x_0= 0 et $f(x_0) = f(0) = 2$

Le point B de coordonnées (0 ; 1) appartient à la courbe C_2 qui est la courbe de la fonction dérivée f' donc $f'(0)$=1

Donc Δ : $y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Leftrightarrow y = 1x + 2 \Leftrightarrow y = x + 2$.

3. On sait que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.

a. Déterminer la valeur de b en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.

A (0 ; 2) ∈ C_1 ⇔ $f(0) = 2$⇔ $\mathrm{e}^0 + a\text{x}0+b$ =2⇔1+b=2⇔b=1

b. Prouver que $a = 2$.

$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + ax + b$ donc $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + a$.

B (0 ;1) ∈ C_2 ⇔$f'(0) = 1$ ⇔ $-\mathrm{e}^0 + a = 1$⇔$-1+a$ =1 ⇔ a=2

4. a. Déterminer le tableau des variations de la fonction f' sur ℝ.

$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + ax + b$ donc $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2x + 1$

- Calcul de $f'(x)$: $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 2$.
- Calcul de $(f')'(x)$: $(f')'(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

  Pour tout réel x, e^{-x} >0 donc $(f')'(x) > 0$ donc la fonction f' est strictement croissante sur ℝ
- Etude des limites aux bornes de l'ensemble de définition :

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty} -x = -\infty \\ \text{Or } \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0\end{array}\right\}$ Donc $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}$ =0 donc $\lim_{x\to+\infty} -\mathrm{e}^{-x} + 2 = 2$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \text{Or } \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty\end{array}\right\}$ Donc $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}$ =+∞ donc $\lim_{x\to-\infty} -\mathrm{e}^{-x} + 2$ = - ∞

x	-∞	+∞
Variations de f'	-∞ ↗	2

b. Sur]-∞ ; +∞ [0∈]-∞ ; 2[de plus f' est continue et strictement croissante.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α dans ℝ.

D'après la calculatrice, en utilisant la méthode par balayage, α≈-0,69.

D'après le tableau des variations de la fonction f' on en déduit le signe de la fonction f' sur $]-\infty\,;+\infty[$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de f'		$-$	0	$+$	

5.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de f'		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Etude des limites aux bornes de l'ensemble de définition :

$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ $\quad \lim_{x\to+\infty} 2x+1 = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ $\quad \lim_{x\to-\infty} 2x+1 = -\infty$ donc forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ »

Levons l'indétermination

$f(x) = e^{-x} + 2x + 1 = \frac{1}{e^x} + 2x + 1 = \frac{1+2xe^x}{e^x} + 1$

Or $\lim_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$ donc $\lim_{x\to-\infty} 2x\,e^x + 1 = 1$

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $\lim_{x\to-\infty} \frac{1+2xe^x}{e^x} = +\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty} \frac{1+2xe^x}{e^x} + 1 = +\infty$

Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (x+2)$.

1. a. Montrer que la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire la position de la courbe C_1 par rapport à la droite Δ.

a. $g(x) = f(x) - (x+2) \Leftrightarrow g(x) = e^{-x} + 2x + 1 - x - 2 \Leftrightarrow g(x) = e^{-x} + x - 1$

Etude des variations de la fonction g : $g'(x) = -e^{-x} + 1$

<u>Signe de $g'(x)$:</u> $-e^{-x} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow e^{-x} = e^0 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$-e^{-x} + 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow e^{-x} < e^0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0$

<u>Variations de la fonction g</u>

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$g(0) = e^{-0} + 0 - 1 = 1 + 0 - 1 = 0$

D'après le tableau des variations la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.

b. D'après le a. $\forall x\in\mathbb{R}^*$ $g(x) > 0$ donc $f(x) - (x+2) > 0 \Leftrightarrow f(x) > x + 2$ donc C_1 est au dessus de Δ

Si $x=0$ alors C_1 et Δ sont sécantes. (on le savait dès le début car la droite Δ est tangente à C_1 au point A d'abscisse 0).

. **2. Soit G la fonction définie par $G(x) = -e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x$.**

a. **Calculer $G'(x)$. Que représente la fonction G pour la fonction g?**

b. **Calculer en unités d'aire, l'aire de la partie colorée en gris .On donnera la partie exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} près du résultat. On admettra que l'aire est égale à G(2) − G(-2) unités d'aire.**

$G(x) = -e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x$. $\quad G'(x) = -(-e^{-x}) + \frac{1}{2}(2x) - 1$. Donc . $G'(x) = e^{-x} + x - 1. = g(x)$

Donc la fonction G est une primitive de la fonction g

$G(2) - G(-2) = -e^{-2} + \frac{1}{2}2^2 - 2 - (-e^{-(-2)} + \frac{1}{2}(-2)^2 - (-2))$

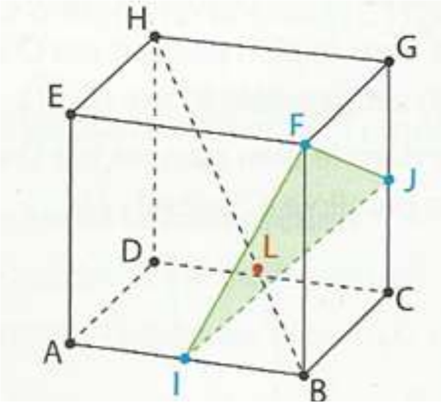
$= -e^{-2} + 2 - 2 - (-e^2 + 2 + 2)$

$= -e^{-2} + e^2 - 4$ u.a.

$\approx 3{,}25$ u.a.

Exercice n°4 :

ABCDEFGH est un cube. I et J sont les milieux des segments [AB] et [CG]



1. les droites (BH) et (IJ) sont-elles sécantes ?

Démontrons que les points B, H, I et J ne sont pas coplanaires.
Les droites (HJ) et (IB) appartiennent à deux plans parallèles disjoints donc les droites (HJ) et (IB) ne sont pas sécantes.
Sont-elles parallèles ?
Dans le carré ABCD les droites (IB) et (DC) sont parallèles.
Dans le carré DCGH les droites (DC) et (HJ) ne sont pas parallèles donc les droites (IB) et (HJ) ne sont pas parallèles.
Conclusion : les droites (IB) et (HJ) ne sont pas coplanaires, donc les points B, H, I et J ne sont pas coplanaires. Donc les droites (BH) et (IJ) ne sont pas sécantes.

2. a. Justifier que (A ; $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{AE}$) est un repère orthonormé de l'espace.

ABCDEFGH est un cube donc les arêtes sont perpendiculaires deux à deux et elles ont même longueur.
Donc (A ; $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{AE}$) est un repère orthonormé de l'espace.

b. Donner les coordonnées des points de la figure.

A(0 ;0 ;0), B(1 ;0 ;0), D(0 ;1 ;0), E(0 ;0 ;1) C(1 ;1 ;0) , F(1 ;0 ;1), G(1 ;1 ;1), H(0 ;1 ;1) I(0,5 ;0 ;0) ,J(1 ;1 ;0,5)

3. Soit L le point d'intersection du plan (FIJ) et de la droite (BH).

a. Justifier qu'il existe deux réels h et k tels que :

$$\overrightarrow{FL} = h\overrightarrow{FI} + k\overrightarrow{FJ}$$

L est un point du plan (FIJ) par hypothèse, donc les points F, L, I et J sont coplanaires. De plus les vecteurs $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{FJ}$ ne sont pas colinéaires , donc il existe deux réels h et k tels que $\overrightarrow{FL} = h\overrightarrow{FI} + k\overrightarrow{FJ}$

b. En déduire que les coordonnées (x ; y ; z) du point L vérifient :

$$x = 1-\frac{h}{2} \quad , \; y = k \quad \text{et } z = 1 - h - \frac{k}{2}$$

$\overrightarrow{FL}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FI}\begin{pmatrix} 0{,}5-1 \\ 0-0 \\ 0-1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{FI}\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ 0{,}5-1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{FL} = h\overrightarrow{FI} + k\overrightarrow{FJ} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = h\text{x}(-0{,}5) + k\text{x}0 \\ y = h\text{x}0 + k\text{x}1 \\ z-1 = h\text{x}(-1) + k\text{x}(-0{,}5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}h + 1 \\ y = k \\ z = -h - \frac{1}{2}k + 1 \end{cases}$$

donc les coordonnées (x ; y ; z) du point L vérifient

$$x = 1-\frac{h}{2} \quad , \; y = k \quad \text{et } z = 1 - h - \frac{k}{2}$$

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BH) puis en déduire les coordonnées du point L.

Soit B(1 ;0 ;0) un point de (BH) et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (BH) .

Pour tout point M (x ; y ; z) de la droite (BH) $\begin{cases} x = 1 + (-1)\text{x}t \\ y = 0 + 1\text{x}t \\ z = 0 + 1\text{x}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

$$\text{M} \in (\text{BH}) \cap (\text{FIJ}) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{h}{2} = 1 - t \\ k = t \\ 1 - h - \frac{k}{2} = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{h}{2} = 1 - k \\ k = t \\ 1 - h - \frac{k}{2} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 2k \\ k = t \\ 1 - h - \frac{3k}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 2k \\ k = t \\ 1 - 2k - \frac{3k}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 2k \\ k = t \\ \frac{7k}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{4}{7} \\ t = \frac{2}{7} \\ k = \frac{2}{7} \end{cases}$$

donc $\begin{cases} x = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7} \\ y = \frac{2}{7} \\ z = \frac{2}{7} \end{cases}$ donc L $(\frac{5}{7} ; \frac{2}{7} ; \frac{2}{7})$

4. a. Justifier que les droites (FL) et (IJ) sont sécantes et déterminer les coordonnées du point P, intersection de ces deux droites.

Par définition le point L appartient au plan (FIJ) donc les droites (FL) et (IJ) sont soit parallèles soit sécantes.

$\overrightarrow{FL}\begin{pmatrix} \frac{5}{7}-1 \\ \frac{2}{7}-0 \\ \frac{2}{7}-1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{FL}\begin{pmatrix} \frac{-2}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{-5}{7} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 1-0,5 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{FL}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc les droites (FL) et (IJ) sont sécantes.

Déterminons des représentations paramétriques des droites (FL) et (IJ)

(FL): $\begin{cases} x = 1 + \frac{-2}{7}t \\ y = \frac{2}{7}t \\ z = 1 - \frac{5}{7}t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ (IJ): $\begin{cases} x = 0,5 + 0,5t' \\ y = t' \\ z = 0,5t' \end{cases}$, $t' \in \mathbb{R}$

$M(x ; y ; z) \in (FL) \cap (IJ) \Leftrightarrow (1)$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5 + 0,5t' = 1 + \frac{-2}{7}t \\ t' = \frac{2}{7}t \\ 0,5t' = 1 - \frac{5}{7}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5 + 0,5t' = 1 - t' \\ t' = \frac{2}{7}t \\ 0,5x\frac{2}{7}t = 1 - \frac{5}{7}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,5t' = 0,5 \\ t' = \frac{2}{7}t \\ \frac{1}{7}t = 1 - \frac{5}{7}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3} \\ t = \frac{7}{2}t' = \frac{7}{6} \\ \frac{6}{7}t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3} \\ t = \frac{7}{2}t' = \frac{7}{6} \\ t = \frac{7}{6} \end{cases}$$

Donc en utilisant la représentation paramétrique de la droite (IJ)

$\begin{cases} x = 0,5 + 0,5x\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 0,5\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{6} \end{cases}$ donc P $(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{6})$

b. Déterminer la position du point P sur le segment [IJ]

$\overrightarrow{IP}\begin{pmatrix} \frac{2}{3}-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}-0 \\ \frac{1}{6}-0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IP}\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ or $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ de plus $\frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$

<u>Exercice n°5 :</u> Soit U la suite définie par : $u_0 = 2$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{u_n - 1}$

a. Démontrer que la suite U est minorée par 2.

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - 2 \geq 0$. Posons P_n : « $u_n - 2 \geq 0$ »

Initialisation

$n = 0$, $u_0 = 2$ donc $u_0 - 2 \geq 0$ donc P_0 est vraie

Hérédité

On suppose que la propriété P_n est vraie pour un entier $n \geq 0$,
démontrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire : « $u_{n+1} - 2 \geq 0$ »

P_n est vraie $\Leftrightarrow u_n - 2 \geq 0$ or $u_{n+1} - 2 = \frac{(u_n)^2}{u_n - 1} - 2 = \frac{(u_n)^2 - 2u_n + 2}{u_n - 1}$

<u>Etude du signe du quotient :</u>

- $u_n - 2 \geq 0 \Leftrightarrow u_n \geq 2 \Leftrightarrow u_n - 1 \geq 1 > 0$
- Posons $X = u_n$, $(u_n)^2 - 2u_n + 2 = X^2 - 2X + 2$, $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 8 = -4 < 0$ donc $X^2 - 2X + 2$ est du signe du coefficient de X^2 qui est 1, donc $\forall X \in \mathbb{R}$, $X^2 - 2X + 2 > 0$ donc $(u_n)^2 - 2u_n + 2 > 0$

Donc $u_{n+1} - 2 > 0 \geq 0$ donc P_{n+1} est vraie, la propriété est héréditaire.

Conclusion

- P_0 est vraie
- la propriété est héréditaire

donc pour tout entier naturel n, $u_n - 2 \geq 0 \Leftrightarrow u_n \geq 2$ donc U est minorée par 2.

b. Déterminer le sens de variation de U.

Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n)^2}{u_n - 1} - u_n = \frac{(u_n)^2 - (u_n)^2 + u_n}{u_n - 1} = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

Or $u_n \geq 2$ donc $u_n > 0$ et $u_n - 1 \geq 1$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite U est strictement croissante.

c. Démontrer que la suite U ne peut converger vers aucun nombre réel ℓ.

Supposons que la suite U converge vers un réel ℓ,

$u_n \geq 2$ donc $\ell \geq 2$. De plus $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ donc

- $\lim_{n\to+\infty} u_n \times u_n = \ell^2$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n - 1 = \ell - 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{(u_n)^2}{u_n - 1} = \frac{\ell^2}{\ell - 1}$
- $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$

$\Bigg\}$ Donc $\ell = \frac{\ell^2}{\ell - 1}$

$\ell = \frac{\ell^2}{\ell - 1} \Leftrightarrow \ell^2 - \ell = \ell^2 \Leftrightarrow -\ell = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$ or $\ell \geq 2$ donc c'est impossible. Donc U ne peut converger vers aucun réel ℓ.

d. Démontrer, en raisonnant par l'absurde que U n'est jamais majorée .En déduire la limite de la suite U.

Supposons qu'il existe un réel M qui majore la suite U. D'après le b. U est une suite croissante, de plus elle est majorée par M donc la suite U converge vers un réel $\ell \leq M$.

Or d'après le c. la suite U ne peut converger vers aucun nombre réel ℓ, donc l'hypothèse « il existe un réel M qui majore la suite U » est fausse. Donc U n'est pas majorée.

Conclusion : U est une suite croissante non majorée donc U diverge vers $+\infty$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (résultat de cours)

Remarque : On peut démontrer le a. et le b. en même temps. **En effet** :

$u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{u_n - 1}$ soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

Etude des variations de la fonction *f* sur]1 ;+∞[:

$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ $(x-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 2x$

$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$, $x^2 - 2x$ est du signe du coefficient de x^2 sauf entre les racines, donc

x	1 2 $+\infty$
Signe de f'	$-$ 0 $+$
Variations de f	$\searrow$ $\nearrow$

Donc la fonction f est strictement croissante sur [2 ;+∞[

Démontrons par récurrence que $2 \leq u_n \leq u_{n+1}$ .Posons P_n : « $2 \leq u_n \leq u_{n+1}$ »

Initialisation

$n=0$ $u_0 = 2$ $u_1 = \frac{(u_0)^2}{u_0 - 1} = \frac{2^2}{2-1} = 4$ donc $2 \leq u_0 \leq u_1$ donc P_0 est vraie

Hérédité

On suppose que la propriété P_n est vraie pour un entier $n \geq 0$,

Démontrons que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire : « $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2}$»

P_n vraie $\Leftrightarrow$ $2 \leq u_n \leq u_{n+1}$ or la fonction f est croissante sur [2 ;+∞[

donc $f(2) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ or $f(2) = 4$

$4 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2}$ or $2 \leq 4$

$2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2}$ donc P_{n+1} est vraie, la propriété est héréditaire

Conclusion

- P_0 est vraie
- la propriété est héréditaire

Donc pour tout entier naturel n, $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2}$ donc la suite U est minorée par 2 et strictement croissante