Nom :
Classe : TMATHS1

Test n°1
Raisonnements par récurrence
le 12/09/2022

Note :
… / 5

	Avis du professeur
Capacités évaluées :	Non acquis → Acquis
Rédiger des raisonnements par récurrence	

Exercice 1 : Soit α un réel strictement positif.
Démontrer par récurrence que quel que soit l'entier naturel n, on a : $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$.

Exercice 2 :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{-1}{4}$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + \frac{3}{4}}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $u_n \leq 2$

Correction du Test n°1

Exercice 1 : Voir la correction de l'exercice n°1 du cours.

Exercice 2 :

(u_n) est la suite définie par $u_0 = \frac{-1}{4}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + \frac{3}{4}}$.

On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$: « $u_n \leq 2$ »

- Initialisation :
  On a $u_0 = \frac{-1}{4} \leq 2$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité :
  Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Autrement dit : $u_k \leq 2$
  On en déduit successivement : $u_k + \frac{3}{4} \leq 2 + \frac{3}{4}$

  $$u_k + \frac{3}{4} \leq \frac{11}{4}$$

  $$\sqrt{u_k + \frac{3}{4}} \leq \sqrt{\frac{11}{4}}$$ car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$

  Or $2 = \sqrt{4} = \sqrt{\frac{16}{4}}$ et $\sqrt{\frac{11}{4}} \leq \sqrt{\frac{16}{4}}$ donc $\sqrt{u_k + \frac{3}{4}} \leq \sqrt{4} \Leftrightarrow u_{k+1} \leq 2$

  Ainsi $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion :
  $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$