Nom :
Classe : TS 5

Test n°1
Raisonnements par récurrence
le 16/09/2019

Note :
… / 10

	Evaluation des capacités
Je sais :	Non — Oui
Les définitions et les propriétés du cours.	⟶
Refaire des exercices corrigés en classe.	⟶
Faire un exercice donné à préparer à la maison	⟶

Cours : Compléter les définitions et les propriétés suivantes : **… / 3,5**

Définitions :

- Une suite (u_n) converge vers un réel L si tout intervalle ouvert contenant L ………………………………
  ……………………………………………………………………………… On note alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$
- Une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert du type …………… contient …………………
  ………………………………………………………………………………………………………

Propriétés :

- Les suites de terme général $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ……………… vers …
- Les suites de terme général n, n^2 et $\sqrt{n}$ ……………… vers …
- Si $k < 0$ alors les suites de terme général kn, kn^2 et $k\sqrt{n}$ …………………………
- La suite de terme général $(-1)^n$ ……………………………………………………………………………
  ………………………………………………………………………………………………………

Exercice 1 : **… / 2**

On considère la suite définie par u_0 = -1 et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,2\,u_n + 0,6$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n \leq 1$.

………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………

Exercice 2 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n^2 + 2$. **… / 2**

Soit A $\in$] 2 ; + ∞ [. Démontrer qu'à partir d'un certain rang tous les termes de la suite sont dans] A ; + ∞ [.

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

Exercice 3 : **… / 2,5**

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 2\,u_n + 1$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite.

……
……
……
……

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul on a : $u_n = 2^n - 1$

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

Correction du Test n°1

Cours : Se référer au cours.

Exercice 1 : Voir la correction de l'exercice du livre p 13 n° 3.

Exercice 2 : Voir la correction de la question 1 de l'exercice n°4 du cours sur les suites.

Exercice 3 : On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 2\,u_n + 1$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite.

$u_1 = 1$
$u_2 = 2\,u_1 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$
$u_3 = 2\,u_2 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$
$u_4 = 2\,u_3 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15$

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul on a : $u_n = 2^n - 1$

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathscr{P}(n)$: $u_n = 2^n - 1$
Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

- Initialisation : Si $n = 1$
  On a, d'une part : $u_1 = 1$
  Et, d'autre part : $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$
  Donc $u_1 = 2^1 - 1$ et ainsi $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

- Hérédité :
  Soit k un entier naturel non nul. $k \geq 1$.
  Supposons que $\mathscr{P}(k)$ soit vraie. Alors : $u_k = 2^k - 1$.
  On en déduit successivement : $2\,u_k = 2\,(2^k - 1)$
  $2\,u_k = 2^{k+1} - 2$
  $2\,u_k + 1 = 2^{k+1} - 2 + 1$
  $2\,u_k + 1 = 2^{k+1} - 1$
  Or, par définition de la suite (u_n) : $u_{k+1} = 2\,u_k + 1$
  Donc : $u_{k+1} = 2^{k+1} - 1$ et ainsi $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion :
  $\mathscr{P}(1)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire donc : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^n - 1$