

Correction du Test n°1

Suites

1) Démontrez que la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = 3n^2 - 12n + 9$ est croissante à partir du rang $n = 2$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n^2 - 12n + 9$$

$$u_{n+1} = 3(n+1)^2 - 12(n+1) + 9 = 3(n^2 + 2n + 1) - 12n - 12 + 9$$

$$u_{n+1} = 3n^2 + 6n + 3 - 12n - 3 = 3n^2 - 6n$$

$$\text{Donc : } u_{n+1} - u_n = 3n^2 - 6n - 3n^2 + 12n - 9 = 6n - 9$$

$$\text{Or : } 6n - 9 > 0 \Leftrightarrow 6n > 9 \Leftrightarrow n > \frac{9}{6} = 1,5$$

Si n est un nombre entier supérieur à 1,5 alors n est un nombre entier supérieur ou égal à 2.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geq 2$ alors : $u_{n+1} - u_n > 0$ et par conséquent : $u_{n+1} > u_n$.

On en déduit que la suite (u_n) est croissante à partir du rang $n = 2$.

2) v est la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = \frac{3^n}{5^{n+2}}$.

a) Justifiez que les termes de la suite sont positifs.

$$3 > 0 \text{ et } 5 > 0.$$

$$\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}, 3^n > 0 \text{ et } 5^{n+2} > 0 \text{ donc : } v_n = \frac{3^n}{5^{n+2}} > 0$$

b) Exprimez $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ en fonction de n .

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{3^n}{5^{n+2}}$$

$$v_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{5^{n+1+2}} = \frac{3^{n+1}}{5^{n+3}}$$

$$\text{On en déduit : } \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{5^{n+3}}}{\frac{3^n}{5^{n+2}}} = \frac{3^{n+1}}{5^{n+3}} \times \frac{5^{n+2}}{3^n} = \frac{3 \times 3^n \times 5^{n+2}}{5 \times 5^{n+2} \times 3^n} = \frac{3}{5}.$$

c) Déduisez-en le sens de variation de la suite (v_n) .

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0 \text{ et } \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3}{5} < 1. \text{ On en déduit } v_n > v_{n+1}.$$

On en déduit que la suite (v_n) est décroissante sur \mathbb{N} .

