Nom : | **Test n°2** | *Note* :
Classe : Tle ES – Spé Maths | le 10/11/2016 | … / 10

	Avis de l'élève		Avis du professeur	
Compétences évaluées	***Oui***	***Non***	***Oui***	***Non***
Justifier une égalité.				
Déterminer une matrice.				
Justifier que les coefficients d'une matrice sont les solutions d'un système donné.				
Résoudre un système.				
Résoudre un problème concret en utilisant le calcul matriciel.				

Exercice 1 : Une compagnie pétrolière possède deux secteurs interactifs A et B.
Pour pouvoir produire, chaque secteur nécessite l'utilisation d'une partie de sa propre production et d'une partie de la production de l'autre. Le tableau ci-dessous indique les échanges inter-secteurs.

	Consommation	
	A	B
Secteur A	20 %	30 %
Secteur B	10 %	40 %

Par exemple, pour produire 1 €, le secteur A consomme 0,2 € de sa propre production et 0,3 € de la production du secteur B.

Chaque secteur doit en outre satisfaire aux besoins de ses clients.

On note : $P = \begin{pmatrix} p_A \\ p_B \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_A \\ b_B \end{pmatrix}$

Les matrices P, E et B indiquent respectivement la production de chaque secteurs, les échanges inter-secteurs et les besoins des clients de la compagnie pétrolière.

Le modèle de Leontief permet de déterminer la « zone d'équilibre », c'est-à-dire la production nécessaire et suffisante pour répondre aux besoins de la clientèle. D'après ce modèle, on a : $P = E \times P + B$

1. a) Justifier l'égalité : $(I_2 - E) \times P = B$.

   b) On appelle « *matrice de Leontief* » la matrice $L = I_2 - E$. Déterminer cette matrice.

   c) Complète : Si la matrice L est inversible, alors il existe une matrice notée L^{-1} telle que $L^{-1} \times L = \dots$

   d) Justifier l'égalité : $P = L^{-1} \times B$.

2. On admet que L^{-1} existe et on pose : $L^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

   a) Montrer que les coefficients de L^{-1} vérifient le système :

$$\begin{cases} 0,8a - 0,1b = 1 \\ -0,3a + 0,6b = 0 \\ 0,8c - 0,1d = 0 \\ -0,3c + 0,6d = 1 \end{cases}$$

   b) Résoudre ce système et déterminer la matrice L^{-1}.

3. La compagnie pétrolière doit satisfaire les besoins de ses clients à hauteur de 159 000 € pour le secteur A et 132 000 € pour le secteur B. Déterminer quelle doit être la production de chaque secteur pour répondre à la demande de la clientèle.

Correction du Test n°2

Exercice 1 :

1. a) On a : P = E × P + B

   On en déduit successivement : P – E × P = B

   $I_2 \times P - E \times P = B$

   $(I_2 - E) \times P = B$

   b) La matrice de Leontief est : $L = I_2 - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,3 \\ -0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$

   c) Si la matrice L est inversible, alors il existe une matrice notée L^{-1} telle que $L^{-1} \times L = I_2$

   d) On a : $(I_2 - E) \times P = B$

   On en déduit successivement : $L \times P = B$

   $L^{-1} \times L \times P = L^{-1} \times B$

   $I_2 \times P = L^{-1} \times B$

   $P = L^{-1} \times B$

2. On admet que L^{-1} existe et on pose : $L^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

   a) $L^{-1} \times L = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & -0,3 \\ -0,1 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   $L^{-1} \times L = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,8a - 0,1b & -0,3a + 0,6b \\ 0,8c - 0,1d & -0,3c + 0,6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,8a - 0,1b = 1 \\ -0,3a + 0,6b = 0 \\ 0,8c - 0,1d = 0 \\ -0,3c + 0,6d = 1 \end{cases}$

   b) On résout le système en deux temps, en prenant les équations deux par deux :

$\begin{cases} 0,8a - 0,1b = 1 \\ -0,3a + 0,6b = 0 \end{cases}$

En multipliant la 1ère ligne par 6 on obtient :

$\begin{cases} 4,8a - 0,6b = 6 \\ -0,3a + 0,6b = 0 \end{cases}$

En additionnant les 2 lignes on obtient :

$\begin{cases} 4,5a = 6 \\ -0,3a + 0,6b = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a = \frac{6}{4,5} = \frac{60}{45} = \frac{4}{3} \\ -0,3a + 0,6b = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ -0,3 \times \frac{4}{3} + 0,6b = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ \frac{-1,2}{3} + 0,6b = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ 0,6b = \frac{1,2}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = \frac{1,2}{1,8} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} 0,8c - 0,1d = 0 \\ -0,3c + 0,6d = 1 \end{cases}$

En multipliant la 1ère ligne par 6 on obtient :

$\begin{cases} 4,8c - 0,6d = 0 \\ -0,3c + 0,6d = 1 \end{cases}$

En additionnant les 2 lignes on obtient :

$\begin{cases} 4,5c = 1 \\ 4,8c - 0,6d = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} c = \frac{1}{4,5} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9} \\ 4,8c - 0,6d = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} c = \frac{2}{9} \\ 4,8 \times \frac{2}{9} - 0,6d = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} c = \frac{2}{9} \\ \frac{9,6}{9} - 0,6d = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} c = \frac{2}{9} \\ 0,6d = \frac{9,6}{9} \end{cases}$ $\begin{cases} c = \frac{2}{9} \\ d = \frac{9,6}{5,4} = \frac{96}{54} = \frac{16}{9} \end{cases}$

   Finalement : $L^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{16}{9} \end{pmatrix}$.

3. La compagnie pétrolière doit satisfaire les besoins de ses clients à hauteur de 159 000 € pour le secteur A et 132 000 € pour le secteur B. On en déduit : $B = \begin{pmatrix} 159000 \\ 132000 \end{pmatrix}$.

   On en déduit le calcul de la production P :

   $P = L^{-1} \times B = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{16}{9} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 159000 \\ 132000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \times 159000 + \frac{2}{3} \times 132000 \\ \frac{2}{9} \times 159000 + \frac{16}{9} \times 132000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300000 \\ 270000 \end{pmatrix}$

   Ainsi, pour répondre aux besoins de leurs clientèles, le secteur A doit produire pour un montant de 300 000 € et le secteur B pour un montant de 270 000 €.