Nom :	**Test n°2**	Date : 30/09/2022
Classe : TMATHS4	Nombres complexes	Note : … / 15

Compétences du livret scolaire :	Avis du professeur Non maîtrisée → Bien maîtrisée
(C4) Calculer, appliquer des techniques, mettre en œuvre des algorithmes.	
(C6) Communiquer à l'écrit en utilisant un langage rigoureux et des outils pertinents.	

La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1 : **… / 7**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

a) $8z + 5i = 3 - z + 2i$

b) $2(z-3)^2 + 4 = -6$

c) $2z - i\bar{z} = 3 + i + 2\bar{z}$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant.

$$\begin{cases} z + 2z' = 2 - 4i \\ 2z - z' = -1 + 7i \end{cases}$$

Exercice 2 : **… / 3**

Utiliser la formule du binôme de Newton et le triangle de Pascal pour développer $(2+i)^5$.

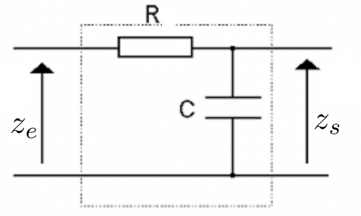
Exercice 3 : **… / 2**

A tout nombre complexe z, distinct de i, on associe le nombre complexe $Z = \dfrac{z+i}{z-i}$.

1. Montrer que $Z = \bar{Z}$ équivaut à $\bar{z} = -z$.

2. Traduire l'équivalence démontrée en utilisant les termes « réel » et « imaginaire ».

Exercice 4 : Nombres complexes en électronique **… / 3**



Le quadripôle représenté ci-contre est constitué d'un résistor de résistance R, en Ω, et d'un condensateur de capacité C, en μF (micro farads).

On associe respectivement à la tension d'entrée et à la tension de sortie les nombres complexes z_e et z_s.

On appelle transmittance le nombre complexe Z défini par $Z = \dfrac{z_s}{z_e}$.

On admet que $Z = \dfrac{1}{1 + j\,RC\,\omega}$ où ω désigne la pulsation du signal, exprimée en radian par seconde, et j le nombre complexe que l'on désigne habituellement par i en mathématiques.

On a : R = 50 Ω, C = 2 μF et $\omega = \dfrac{1}{100}$ rad.s^{-1}

1. Déterminer la forme algébrique de Z.

2. On suppose que $z_e = 150(-\sqrt{3} + j)$. Déterminer la forme algébrique de z_s.

Correction du Test n°2

Exercice 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

a) $8z+5i=3-z+2i$

$8z+z=3+2i-5i$

$9z=3-3i$

$z=\dfrac{3-3i}{9}$

$z=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}i$

b) $2(z-3)^2+4=-6$

$2(z-3)^2=-6-4$

$2(z-3)^2=-10$

$(z-3)^2=\dfrac{-10}{2}$

$(z-3)^2=-5$

$(z-3)^2=5\,i^2$

$z-3=\sqrt{5}\,i$ ou $z-3=-\sqrt{5}\,i$

$z=3+\sqrt{5}\,i$ ou $z=3-\sqrt{5}\,i$

c) (E) : $2z-i\bar{z}=3+i+2\bar{z}$

On pose $z=x+iy$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

Résoudre (E) revient à résoudre :

$2z=3+i+(2+i)\bar{z}$

$2(x+iy)=3+i+(2+i)(x-iy)$

$2x+2iy=3+i+2x-2iy+ix-i^2y$

$4iy-ix-y=3+i$

$-y+(4y-x)i=3+i$

Or, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et imaginaires sont deux à deux égales.

Ainsi, résoudre (E) revient à résoudre :

$\begin{cases}-y=3\\4y-x=1\end{cases}\quad\begin{cases}y=-3\\-12-1=x\end{cases}\quad\begin{cases}x=-13\\y=-3\end{cases}$

Finalement, $z=-13-3i$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant.

$$\begin{cases}z+2z'=2-4i & L_1\\2z-z'=-1+7i & L_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}2z+4z'=4-8i & L_1\leftarrow 2L_1\\2z-z'=-1+7i & L_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}2z+4z'=4-8i & L_1\\2z-2z+4z'+z'=4+1-8i-7i & L_2\leftarrow L_1-L_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}2z+4z'=4-8i\\5z'=5-15i\end{cases}$$

$$\begin{cases}2z=4-8i-4z'\\z'=1-3i\end{cases}$$

$$\begin{cases}2z=4-8i-4(1-3i)\\z'=1-3i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2z=4-8i-4+12i\\z'=1-3i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2z=4i\\z'=1-3i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=2i\\z'=1-3i\end{cases}$$

Exercice 2 :

Utiliser la formule du binôme de Newton et le triangle de Pascal pour développer $(2+i)^5$

Triangle de Pascal :

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$$(2+i)^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}2^{5-k}\times i^k$$

$$(2+i)^5=1\times 2^5\times i^0+5\times 2^4\times i^1+10\times 2^3\times i^2+10\times 2^2\times i^3+5\times 2^1\times i^4+1\times 2^0\times i^5$$

Or, d'une part : $2^0=1\quad 2^1=2\quad 2^2=4\quad 2^3=8\quad 2^4=16\quad 2^5=32$

et d'autre part : $i^0=1\quad i^1=i\quad i^2=-1\quad i^3=i^2\times i=-i\quad i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1\quad i^5=i^4\times i=i$

Ainsi : $(2+i)^5=32+5\times 16\,i+10\times 8\times(-1)+10\times 4\times(-i)+5\times 2+i$

$(2+i)^5=32+80\,i-80-40i+10+i=-38+41\,i$

Exercice 3 :

A tout nombre complexe z, distinct de i, on associe le nombre complexe $Z = \dfrac{z+i}{z-i}$.

1. Montrer que $Z = \bar{Z}$ équivaut à $\bar{z} =$ -z.

Si $Z = \dfrac{z+i}{z-i}$ alors $\bar{Z} = \dfrac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}$

$Z = \bar{Z} \iff \dfrac{z+i}{z-i} = \dfrac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}$

En appliquant le produit en croix on obtient $Z = \bar{Z} \iff (z+i)(\bar{z}+i) = (z-i)(\bar{z}-i)$

$$z\bar{z} + iz + i\bar{z} + i^2 = z\bar{z} - iz - i\bar{z} + i^2$$

$$iz + i\bar{z} = -iz - i\bar{z}$$

$$2i\bar{z} = \text{-}2iz$$

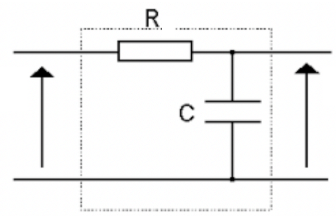
$$\bar{z} = \text{-}z$$

2. Traduire l'équivalence démontrée en utilisant les termes « réel » et « imaginaire ».

Un nombre complexe est égal à son conjugué si et seulement s'il est réel.
Un nombre complexe est l'opposé de son conjugué si et seulement si c'est un imaginaire pur.
Ainsi, l'équivalence $Z = \bar{Z} \iff \bar{z} =$ -z signifie que « Z est un réel si et seulement si z est un imaginaire pur ».

Exercice 4 : Nombres complexes en électronique

Le quadripôle représenté ci-contre est constitué d'un résistor de résistance R, en Ω, et d'un condensateur de capacité C, en μF (micro farads).



On associe respectivement à la tension d'entrée et à la tension de sortie les nombres complexes z_e et z_s.

On appelle transmittance le nombre complexe Z défini par $Z = \dfrac{z_s}{z_e}$.

On admet que $Z = \dfrac{1}{1 + j\,RC\,\omega}$ où ω désigne la pulsation du signal, exprimée en radian par seconde, et j le nombre complexe que l'on désigne habituellement par i en mathématiques.

On a : R = 50 Ω, C = 2 μF et $\omega = \dfrac{1}{100}$ rad.s^{-1}

1. Déterminer la forme algébrique de Z.

$Z = \dfrac{1}{1 + j\,RC\,\omega}$ avec R = 50 Ω, C = 2 μF et $\omega = \dfrac{1}{100}$ rad.s^{-1}

Donc $Z = \dfrac{1}{1 + j \times 50 \times 2 \times \dfrac{1}{100}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{100}{100}j} = \dfrac{1}{1+j} = \dfrac{1(1-j)}{(1+j)(1-j)} = \dfrac{1-j}{1^2+1^2} = \dfrac{1-j}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}j$

2. On suppose que $z_e = 150(\text{-}\sqrt{3} + j)$. Déterminer la forme algébrique de z_s.

On sait que $Z = \dfrac{z_s}{z_e}$ et que $z_e = 150(\text{-}\sqrt{3} + j)$.

De plus, on vient de déterminer $Z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}j$

On en déduit : $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}j = \dfrac{z_s}{150(\text{-}\sqrt{3} + j)}$

En appliquant le produit en croix, on obtient : $z_s = (\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}j)(\text{-}150\sqrt{3} + 150j)$

Donc $z_s = \dfrac{\text{-}150\sqrt{3}}{2} + \dfrac{150}{2}j + \dfrac{150\sqrt{3}}{2}j - \dfrac{150}{2}j^2$

$z_s = \dfrac{\text{-}150\sqrt{3}}{2} + \dfrac{150(1+\sqrt{3})}{2}j + \dfrac{150}{2} = 75 - 75\sqrt{3} + 75(1+\sqrt{3})j$