Nom :
Classe : TMATHS1

Test n°2
Variations d'une suite
le 19/09/2022

Note :
… / 5

Capacités évaluées :	Avis du professeur (Non acquis → Acquis)
Calculer les premiers termes d'une suite / Conjecturer le sens de variations d'une suite	
Justifier le résultat d'un calcul littéral	
Justifier la monotonie d'une suite définie par une formule explicite.	
Etudier les variations d'une fonction	
Justifier la monotonie d'une suite définie par une relation de récurrence.	

Exercice : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 3$ **… / 5**

1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^3 + n - 3$.

a) Calculer les 3 premiers termes de la suite (u_n) puis conjecturer le sens de variations de cette suite.

b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} - u_n = 3n^2 + 3n + 2$

Indication : On pourra appliquer, sans justification, l'identité remarquable suivante :
Quels que soient les réels a et b on a : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

c) En déduire la justification du sens de variations de la suite (u_n).

2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_n^3 + v_n - 3$.

   a) Calculer les 3 premiers termes de la suite (v_n) puis conjecturer le sens de variations de cette suite.

   b) Etudier les variations de la fonction $f : x \longmapsto x^3 + x - 3$ sur $\mathbb{R}$.

   c) Démontrer la conjecture faite à la question a) par un raisonnement par récurrence.

Correction du test n°2

Exercice : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 3$

1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^3 + n - 3$.

a) Calculer les 3 premiers termes de la suite (u_n) puis conjecturer le sens de variations de cette suite.

$u_0 = 0^3 + 0 - 3 =$ -3
$u_1 = 1^3 + 1 - 3 = 2 - 3 =$ -1
$u_2 = 2^3 + 2 - 3 = 8 + 2 - 3 = 7$
Il semble que la suite (u_n) soit croissante sur $\mathbb{N}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} - u_n = 3n^2 + 3n + 2$

Indication : On pourra appliquer, sans justification, l'identité remarquable suivante :
Quels que soient les réels a et b on a : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^3 + n - 3$
On en déduit $u_{n+1} = (n+1)^3 + (n+1) - 3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1^3 + n + 1 - 3 = n^3 + 3n^2 + 4n - 1$
Ainsi : $u_{n+1} - u_n = n^3 + 3n^2 + 4n - 1 - (n^3 + n - 3)$
$u_{n+1} - u_n = n^3 + 3n^2 + 4n - 1 - n^3 - n + 3$
$u_{n+1} - u_n = 3n^2 + 3n + 2$

c) En déduire la justification du sens de variations de la suite (u_n).

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3n^2 + 3n + 2$
$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 0$. On en déduit $3n \geq 0$ puis $3n + 2 \geq 2 > 0$. De plus, $3n^2 \geq 0$.
Ainsi, $3n^2 + 3n + 2 > 0 \iff u_{n+1} - u_n > 0 \iff u_{n+1} > u_n$
Ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_n^3 + v_n - 3$.

a) Calculer les 3 premiers termes de la suite (v_n) puis conjecturer le sens de variations de cette suite.

$v_0 = 1$
$v_1 = v_0^3 + v_0 - 3 = 1^3 + 1 - 3 = 2 - 3 =$ -1
$v_2 = v_1^3 + v_1 - 3 =$ (-1)$^3 - 1 - 3 =$ -2 $- 3 =$ -5
Il semble que la suite (v_n) soit décroissante sur $\mathbb{N}$.

b) Etudier les variations de la fonction $f : x \longmapsto x^3 + x - 3$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x - 3$
$f'(x) = 3x^2 + 1$
$3 > 0$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ on en déduit successivement $3x^2 \geq 0$ et $3x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Ainsi $f'(x) > 0$
La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Démontrer la conjecture faite à la question a) par un raisonnement par récurrence.

(v_n) est la suite définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n^3 + v_n - 3 = f(v_n)$.

On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$: « $v_n \geq v_{n+1}$ »

- Initialisation :
  On a $v_0 = 1$ et $v_1 =$ -1 donc $v_0 \geq v_1$. Ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité :
  Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Autrement dit : $v_k \geq v_{k+1}$
  La fonction f étant croissante sur $\mathbb{R}$ on en déduit $f(v_k) \geq f(v_{k+1}) \iff v_{k+1} \geq v_{k+2}$
  Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
- Conclusion :
  $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq v_{n+1}$
  Ce qui prouve que la suite (v_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.