Nom :	**Test n°3**	Date : 21/10/2022
Classe : TMATHS4	Divisibilité dans $\mathbb{Z}$	Note : … / 20

Compétences du livret scolaire :	**Avis du professeur** Non maîtrisée → Bien maîtrisée
(C4) Calculer, appliquer des techniques, mettre en œuvre des algorithmes.	
(C5) Raisonner, argumenter en exerçant un regard critique, démontrer.	
(C6) Communiquer à l'écrit en utilisant un langage rigoureux et des outils pertinents.	

La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1 : **… / 4**

1. Poser la division euclidienne de $1\,027$ par 253. En déduire la décomposition associée du nombre $1\,027$.
2. Déterminer, sans calcul posé supplémentaire, le reste de la division euclidienne de $1\,027$ par 4. Justifier par une transformation d'écriture de la décomposition obtenue précédemment.
3. Déterminer, de même, le reste de la division euclidienne de -1 027 par 4.

Exercice 2 : **… / 4**

1. a) Décomposer le nombre 220 en produit de facteurs premiers

   b) En déduire l'ensemble des diviseurs de 220 dans $\mathbb{N}$.
2. On appelle diviseur strict de l'entier naturel n tout diviseur d de n vérifiant $0 < d < n$. Deux entiers naturels distincts sont dits **amicaux** lorsque chacun de ces entiers est égal à la somme des diviseurs stricts positifs de l'autre. Vérifier que 220 et 284 sont amicaux.

Exercice 3 : Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que 6 divise $n+5$. **… / 2**

Exercice 4 : Raisonnement par disjonction des cas. **… / 3**

Démontrer que quel que soit l'entier naturel n, le nombre A = $n(n^2+11)$ est toujours divisible par 3.

Exercice 5 : Raisonnement par récurrence. **… / 4**

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $9^n - 2^n$ est divisible par 7.

Exercice 6 : Raisonnement par l'absurde (en question 2) **… / 3**

1. Montrer que si un entier naturel d divise $12n+7$ et $3n+1$ alors il divise 3.
2. En déduire que quel que soit l'entier naturel n, la fraction $\dfrac{12n+7}{3n+1}$ est irréductible.

Correction du test n°3

Exercice 1 :

1. Poser la division euclidienne de $1\,027$ par 253. En déduire la décomposition associée du nombre $1\,027$.

$$\begin{array}{r|l} 1\,027 & 253 \\ \cline{2-2} -\ 1\,012 & 4 \\ \cline{1-1} 15 & \end{array}$$

donc $1\,027 = 253 \times 4 + 15$ avec $0 \leq 15 < 253$

2. Déterminer, sans calcul posé supplémentaire, le reste de la division euclidienne de $1\,027$ par 4. Justifier par une transformation d'écriture de la décomposition obtenue précédemment.

15 ne peut pas être le reste de la division euclidienne de $1\,027$ par 4 car $15 \geq 4$.
En revanche, on peut écrire : $1\,027 = 253 \times 4 + 15$
$1\,027 = 253 \times 4 + 3 \times 4 + 3$
$1\,027 = (253 + 3) \times 4 + 3$
$1\,027 = 256 \times 4 + 3$ avec $0 \leq 3 < 4$
On en déduit que le reste dans la division euclidienne de $1\,027$ par 4 est 3.

3. Déterminer, de même, le reste de la division euclidienne de -$1\,027$ par 4.

On sait que : $1\,027 = 253 \times 4 + 15$
On en déduit : $-1\,027 = -(253 \times 4 + 15)$
$-1\,027 = -253 \times 4 - 15$
$-1\,027 = -253 \times 4 - 16 + 1$
$-1\,027 = -253 \times 4 - 4 \times 4 + 1$
$-1\,027 = (-253 - 4) \times 4 + 1$
$-1\,027 = -257 \times 4 + 1$ avec $0 \leq 1 < 4$
On en déduit que le reste dans la division euclidienne de -$1\,027$ par 4 est 1.

Exercice 2 :

1. a) Décomposer le nombre 220 en produit de facteurs premiers

$220 = 22 \times 10 = 2 \times 11 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5 \times 11$

b) En déduire l'ensemble des diviseurs de 220 dans $\mathbb{N}$.

Dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 220 est :
D(220)={ 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 11 ; 20 ; 22 ; 44 ; 55 ; 110 ; 220 }

2. On appelle diviseur strict de l'entier naturel n tout diviseur d de n vérifiant $0 < d < n$.
Deux entiers naturels distincts sont dits **amicaux** lorsque chacun de ces entiers est égal à la somme des diviseurs stricts positifs de l'autre. Vérifier que 220 et 284 sont amicaux.

Dans $\mathbb{N}$, les diviseurs stricts de 220 sont 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 et 110.
On calcule leur somme : $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$
Réciproquement, les diviseurs stricts de 284 sont 1, 2, 4, 71 et 142.
On calcule leur somme : $1+2 + 4 + 71 + 142 = 220$
Ainsi, 220 et 284 sont des nombres amicaux.

Exercice 3 : Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que 6 divise $n + 5$.

Si n est un entier relatif tel que 6 divise $n + 5$ alors : $\exists\, q \in \mathbb{Z}, n + 5 = 6q$
Dans ce cas, $n = 6q - 5$
Réciproquement, s'il existe un entier relatif q tel que $n = 6q - 5$ alors $n + 5 = 6q$ et dans ce cas 6 divise $n + 5$.
Ainsi, l'ensemble $\mathscr{E}$ des entiers relatifs n tels que 6 divise $n + 5$ est :

$$\mathscr{E} = \{\ 6q - 5 \text{ où } q \in \mathbb{Z}\ \}$$

Exercice 4 : Raisonnement par disjonction des cas.

Démontrer que quel que soit l'entier naturel n, le nombre A = $n(n^2+11)$ est toujours divisible par 3.

Montrons, par disjonction des cas, que quel que soit l'entier naturel n, le nombre $n(n^2+11)$ est divisible par 3.

- Soit n est divisible par 3. Dans ce cas :
  $\exists\, q \in \mathbb{N}, n = 3q$ et A = $n(n^2+11) = 3q((3q)^2+11) = 3q(9q^2+11) = 3q'$ avec $q' = q(9q^2+11)$
  Or $q \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ q' \in \mathbb{N}$
  Donc A est divisible par 3.
- Soit le reste dans la division euclidienne de n par 3 vaut 1. Dans ce cas :
  $\exists\, q \in \mathbb{N}, n = 3q+1$ et A = $n(n^2+11) = (3q+1)((3q+1)^2+11) = (3q+1)(9q^2+6q+1+11)$
  A = $(3q+1)(9q^2+6q+12) = 3(3q+1)(3q^2+2q+4) = 3q'$
  avec $q' = (3q+1)(3q^2+2q+4)$
  Or $q \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ q' \in \mathbb{N}$
  Donc A est divisible par 3.
- Soit le reste dans la division euclidienne de n par 3 vaut 2. Dans ce cas :
  $\exists\, q \in \mathbb{N}, n = 3q+2$ et A = $n(n^2+11) = (3q+2)((3q+2)^2+11) = (3q+2)(9q^2+12q+4+11)$
  A = $(3q+2)(9q^2+12q+15) = 3(3q+2)(3q^2+4q+5) = 3q'$
  avec $q' = (3q+2)(3q^2+4q+5)$
  Or $q \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ q' \in \mathbb{N}$
  Donc A est divisible par 3.

Ainsi, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, le nombre $n(n^2+11)$ est divisible par 3.

Exercice 5 : Raisonnement par récurrence.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $9^n - 2^n$ est divisible par 7.

On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$: " $9^n - 2^n$ est divisible par 7 "

- Initialisation :

  On a $9^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$

  Or 0 est divisible par 7. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité :
  Soit k un entier naturel. On suppose que $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Alors $9^k - 2^k$ est divisible par 7.
  On en déduit qu'il existe un entier relatif q tel que $9^k - 2^k = 7q$
  En multipliant chaque membre de cette égalité par $9+2=11$ on obtient :
  $(9^k - 2^k)(9+2) = 7q \times 11$
  $9^{k+1} + 2 \times 9^k - 2^k \times 9 - 2^{k+1} = 77q$
  $9^{k+1} - 2^{k+1} = 77q - 2 \times 9^k + 2^k \times 9$
  Or $9^k - 2^k = 7q \ \Leftrightarrow\ 9^k = 7q + 2^k$
  On en déduit : $9^{k+1} - 2^{k+1} = 77q - 2 \times (7q + 2^k) + 2^k \times 9$
  $9^{k+1} - 2^{k+1} = 77q - 14q - 2 \times 2^k + 2^k \times 9$
  $9^{k+1} - 2^{k+1} = 63q + (-2+9)\, 2^k$
  $9^{k+1} - 2^{k+1} = 63q + 7 \times 2^k$
  $9^{k+1} - 2^{k+1} = 7(9q + 2^k)$
  $9^{k+1} - 2^{k+1} = 7q'$ en posant $q' = 9q + 2^k$
  Or, $q \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow\ q' \in \mathbb{Z}$

  Donc $9^{k+1} - 2^{k+1}$ est divisible par 7. Ainsi, $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
- Conclusion :
  $\mathscr{P}(0)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire donc elle est toujours vraie.

  Ainsi, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $9^n - 2^n$ est divisible par 7.

Exercice 6 : Raisonnement par l'absurde (en question 2)

1. Montrer que si un entier naturel d divise $12n+7$ et $3n+1$ alors il divise 3.

Soient n et d deux entiers naturels.
Si d divise $12n+7$ et $3n+1$ alors d divise A $=12n+7-4(3n+1)$
Or, A $=12n+7-12n-4=3$
Donc d divise 3.

2. En déduire que quel que soit l'entier naturel n, la fraction $\dfrac{12n+7}{3n+1}$ est irréductible.

Montrons que quel que soit l'entier naturel n, la fraction $\dfrac{12n+7}{3n+1}$ est irréductible.
Pour cela, effectuons un raisonnement par l'absurde en supposant le contraire.
Autrement dit, supposons qu'il existe un entier naturel n tel que la fraction $\dfrac{12n+7}{3n+1}$ est réductible.
Dans ce cas, il existe un diviseur commun à $12n+7$ et $3n+1$, autre que 1. Notons le d.
Et il existe deux autres entiers naturels p et q tels que :

$$\frac{12n+7}{3n+1}=\frac{d\,p}{d\,q}$$

On a précédemment montré que, dans ce cas, d est un diviseur de 3. Or, 3 étant un nombre premier, ces seuls diviseurs dans $\mathbb{N}$ sont 1 et 3. Dans ce cas, d vaut nécessairement 3.
Cela implique que 3 est un diviseur de $3n+1$. Ce qui est absurde puisque le reste dans la division euclidienne de $3n+1$ par 3 vaut 1. Ainsi, il n'existe aucun entier naturel n tel que la fraction $\dfrac{12n+7}{3n+1}$ soit réductible.
Ce qui prouve que quel que soit l'entier naturel n, la fraction $\dfrac{12n+7}{3n+1}$ est irréductible.