Nom :

Classe : TS 5

Test n°3

Résolutions d'équations dans $\mathbb{C}$

le 20/12/2018

Note :

… / 10

	Avis de l'élève		*Avis du professeur*	
Compétences évaluées	***Oui***	***Non***	***Oui***	***Non***
Résoudre des équations				

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (en déterminant les solutions sous forme algébrique).

a) $z - 5 = 3iz + 10i$

b) $\bar{z} - 5 + i = -2(z - 2 - 3i)$

c) $4z^2 + 9 = 0$

d) $z^2 - 4z + 8 = 0$

e) $z^4 + 2z^2 - 8 = 0$

Exercice 2 : On considère le polynôme $P(z) = z^3 + (-6 + i)z^2 + (13 - 6i)z + 13i$

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on a :
$$P(z) = (z + i)(az^2 + bz + c)$$

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Correction du Test n°3

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (en déterminant les solutions sous forme algébrique).

a) $z - 5 = 3iz + 10i$

$z - 3iz = 5 + 10i$

$(1 - 3i)z = 5 + 10i$

$z = \frac{5+10i}{1-3i}$

$z = \frac{(5+10i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}$

$z = \frac{5+15i+10i+30i^2}{1^2-(3i)^2}$

$z = \frac{5-30+25i}{1+9}$

$z = \frac{-25+25i}{10}$

$z = \frac{-5}{2} + \frac{5}{2}i$

b) $\bar{z} - 5 + i = -2(z - 2 - 3i)$

$\bar{z} - 5 + i = -2z + 4 + 6i$

En posant $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$, avec x et y dans $\mathbb{R}$, on obtient :

$x - iy - 5 + i = -2(x + iy) + 4 + 6i$

$x - iy - 5 + i = -2x - 2iy + 4 + 6i$

$(x - 5) + i(1 - y) = (-2x + 4) + i(6 - 2y)$

Or, deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes parties réelles et les mêmes parties imaginaires. On en déduit :

$$\begin{cases} x - 5 = -2x + 4 \\ 1 - y = 6 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 9 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

Finalement : $z = x + iy = 3 + 5i$

c) $4z^2 + 9 = 0$

$z^2 = \frac{-9}{4}$

$z = \frac{3}{2}i$ ou $z = -\frac{3}{2}i$

d) $z^2 - 4z + 8 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 32 = -16 < 0$

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées.

$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{4-i\sqrt{16}}{2} = \frac{4-4i}{2} = 2 - 2i$

$z_2 = \bar{z_1} = 2 + 2i$

e) $z^4 + 2z^2 - 8 = 0$

On pose $Z = z^2$ et on résout $Z^2 + 2Z - 8 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 32 = 36 > 0$

L'équation admet deux solutions réelles.

$Z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{36}}{2} = \frac{-2-6}{2} = -4$

$Z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{36}}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2$

Or $Z = z^2$ donc : $z^2 = -4$ ou $z^2 = 2$

On en déduit : $z = 2i$ ou $z = -2i$ ou $z = \sqrt{2}$ ou $z = -\sqrt{2}$

Exercice 2 : On considère le polynôme $P(z) = z^3 + (-6+i)z^2 + (13-6i)z + 13i$

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on a :

$$P(z) = (z+i)(az^2 + bz + c)$$

$\forall\, z \in \mathbb{C}$, A $= (z+i)(az^2+bz+c) = az^3 + bz^2 + cz + iaz^2 + ibz + ic$

A $= az^3 + (b+ia)z^2 + (c+ib)z + ic$

Or $P(z) = z^3 + (-6+i)z^2 + (13-6i)z + 13i$

Donc, par identification, $P(z) = (z+i)(az^2+bz+c)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + ia = -6 + i \\ c + ib = 13 - 6i \\ c = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + i = -6 + i \\ 13 + ib = 13 - 6i \\ c = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 13 \end{cases}$$

Finalement, $P(z) = (z+i)(z^2 - 6z + 13)$

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+i)(z^2 - 6z + 13) = 0$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Donc $P(z) = 0 \Leftrightarrow z + i = 0$ ou $z^2 - 6z + 13 = 0 \Leftrightarrow z = -i$ ou $z^2 - 6z + 13 = 0$

On considère le trinôme $z^2 - 6z + 13$

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \times 13 = -16 < 0$

Le trinôme admet deux racines complexes conjuguées.

$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{6 - i\sqrt{16}}{2} = \frac{6-4i}{2} = 3 - 2i$

$z_2 = \bar{z_1} = 3 + 2i$

Finalement, $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = -i$ ou $z = 3 - 2i$ ou $z = 3 + 2i$