Nom :
Classe : Tle ES – Spé

Test n°4
le 16/02/2017

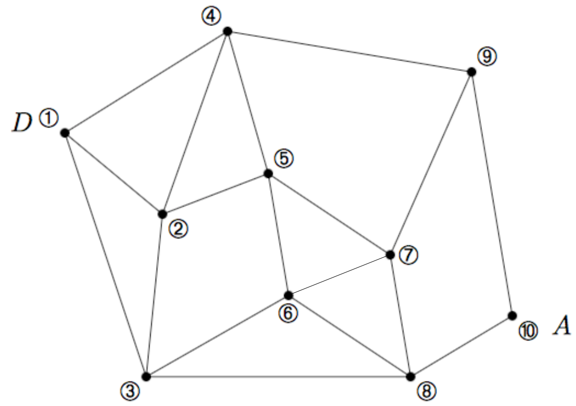
Note :
… / 10

	Avis de l'élève		*Avis du professeur*	
Compétences évaluées	***Oui***	***Non***	***Oui***	***Non***
Connaissance des définitions et du vocabulaire.				
Rigueur des explications et des justifications				
Maîtrise des méthodes travaillées en classe.				

Un guide de randonnée en montagne décrit les itinéraires possibles autour d'un pic rocheux. La description des itinéraires est donnée par le graphe ci-dessous. Les sommets de ce graphe correspondent aux lieux remarquables. Les arêtes de ce graphe représentent les sentiers possibles entre ces lieux.

Légende :

① Départ (D)	② Passerelle
③ Roche percée	④ Col des 3 vents
⑤ Pic rouge	⑥ Refuge
⑦ Col vert	⑧ Pont Napoléon
⑨ Cascade des anglais	⑩ Arrivée (A)



1. a) Déterminer, en justifiant, si le graphe est complet.

   b) Déterminer, en justifiant, si le graphe est connexe.

2. a) Déterminer, en justifiant, s'il existe un circuit permettant de passer par tous les lieux remarquables en empruntant une fois et une seule chaque sentier lorsque le départ se fait en ① et l'arrivée en ⑩.

   b) Existerait-il un circuit permettant de passer par tous les lieux remarquables en empruntant une fois et une seule chaque sentier en changeant le point d'arrivée ? Si oui, donner un exemple.

3. a) Donner la matrice d'adjacence M associée à ce graphe, les sommets étant pris dans l'ordre croissant.

   b) On donne ci-dessous M^3.

$$M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 7 & 8 & 4 & 4 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & 9 & 8 & 9 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 9 & 4 & 4 & 6 & 9 & 4 & 8 & 5 & 1 \\ 8 & 8 & 4 & 4 & 9 & 5 & 2 & 6 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & 6 & 9 & 4 & 9 & 9 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 9 & 5 & 9 & 6 & 8 & 8 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 4 & 2 & 9 & 8 & 4 & 10 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 4 & 8 & 10 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 & 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

   Que représente le nombre 5 situé sur la sixième ligne et la quatrième colonne ?
   Combien y a-t-il de chemins de longueur 3 permettant de relier les lieux de départ ① et d'arrivée ⑩.

   c) Déterminer par le calcul le nombre d'itinéraires allant de ① à ⑩ et empruntant 4 sentiers.
   Parmi ceux là, citer ceux passant par Passerelle.

4. Le guide de randonnée voudrait baliser chaque lieu en plantant des drapeaux de couleur et en faisant en sorte que deux lieux adjacents soient toujours balisés à l'aide de couleurs différentes.

   a) Identifier un sous graphe-complet d'ordre maximum. Quel est le nombre chromatique du graphe ?

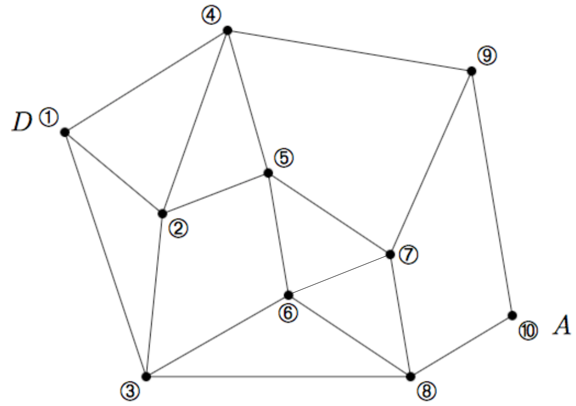
   b) Proposer une coloration du graphe utilisant un nombre minimum de couleurs.

Correction du test n°4

Un guide de randonnée en montagne décrit les itinéraires possibles autour d'un pic rocheux. La description des itinéraires est donnée par le graphe ci-dessous. Les sommets de ce graphe correspondent aux lieux remarquables. Les arêtes de ce graphe représentent les sentiers possibles entre ces lieux.

Légende :

① Départ (D)	② Passerelle
③ Roche percée	④ Col des 3 vents
⑤ Pic rouge	⑥ Refuge
⑦ Col vert	⑧ Pont Napoléon
⑨ Cascade des anglais	⑩ Arrivée (A)



1. a) Le graphe n'est pas complet car les sommets 4 et 10, par exemple, ne sont pas adjacents.

   b) Le graphe est connexe car la chaîne 1 – 3 – 8 – 10 – 9 – 4 – 2 – 5 – 7 – 6 relie tous les sommets.

2. a) Le graphe possède exactement deux sommets de degrés impairs : ① et ⑨.
   Donc, d'après le théorème d'Euler, ce graphe possède une chaîne eulérienne. Les sommets de départ et d'arrivée de cette chaîne eulérienne sont, dans ce cas, obligatoirement les sommets de degrés impairs.
   Il n'existe donc pas de circuit permettant de passer par tous les lieux remarquables en empruntant une fois et une seule chaque sentier lorsque le départ se fait en ① et l'arrivée en ⑩.

   b) Une chaîne eulérienne existe au départ de ① et à l'arrivée de ⑨.
   Par exemple : 1 – 3 – 2 – 1 – 4 – 2 – 5 – 4 – 9 – 7 – 5 – 6 – 3 – 8 – 6 – 7 – 8 – 10 – 9

3. a) Les sommets étant pris dans l'ordre croissant, la matrice d'adjacence du graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   b) On donne ci-dessous M^3.

$$M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 7 & 8 & 4 & 4 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & 9 & 8 & 9 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 9 & 4 & 4 & 6 & 9 & 4 & 8 & 5 & 1 \\ 8 & 8 & 4 & 4 & 9 & 5 & 2 & 6 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & 6 & 9 & 4 & 9 & 9 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 9 & 5 & 9 & 6 & 8 & 8 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 4 & 2 & 9 & 8 & 4 & 10 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 4 & 8 & 10 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 & 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

   Le nombre 5 situé sur la sixième ligne et la quatrième colonne signifie qu'il existe 5 itinéraires de longueur 3 au départ du Refuge (⑥) et à l'arrivée du col des 3 vents (④).
   A l'intersection de la 1ère ligne et de la dernière colonne on lit qu'il y a 2 chemins de longueur 3 permettant de relier les lieux de départ ① et d'arrivée ⑩.

c) On calcule le nombre d'itinéraires allant de ① à ⑩ et empruntant 4 sentiers en multipliant la 1ère ligne de M par la dernière colonne de M^3 (ou inversement la 1ère ligne de M^3 par la dernière colonne de M.)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 1 \times 2 + 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 3$$

Il y a donc 3 itinéraires empruntant 4 sentiers qui permettent d'aller de ① à ⑩.
Parmi ceux là, les itinéraires 1 – 2 – 3 – 8 – 10 et 1 – 2 – 4 – 9 – 10 passent par Passerelle (②).

4. Le guide de randonnée voudrait baliser chaque lieu en plantant des drapeaux de couleur et en faisant en sorte que deux lieux adjacents soient toujours balisés à l'aide de couleurs différentes.

   a) Les sous-graphe complets d'ordre maximum sont d'ordre 3. Par exemple : 5 – 6 – 7.
   On en déduit que le nombre chromatique du graphe est au minimum égal à 3.

   b) On peut colorer le graphe en n'utilisant que 3 couleurs (voir ci-dessous).
   Le nombre chromatique du graphe est donc bien égal à 3.