Nom :
Classe : 2nde 5

Test n°5
le 07/01/2019

Note :
… / 5

Compétences évaluées	Avis de l'élève		Avis du professeur	
	Oui	***Non***	***Oui***	***Non***
Développer				
Calculer				
Justifier qu'une expression est de signe constant sur $\mathbb{R}$				
Justifier qu'une fonction admet un extremum sur $\mathbb{R}$ et préciser cet extremum.				

Exercice 1 :

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 8x + 7$.
   a) Justifier que, quel que soit le réel x, on a : $f(x) = 2(x+2)^2 - 1$.
   b) Calculer $f(-2)$.
   c) Justifier que $f(x) - f(-2)$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$.
   d) En déduire que la fonction f admet un extremum (à préciser). En quelle valeur de x est-il atteint ?

2. g est la fonction définie par $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$
   a) Justifier que, quel que soit le réel x, on a $g(x) = -\frac{1}{3}(x-1)^2 + 3$.
   b) Démontrer que g admet un extremum. Préciser sa valeur et le réel x en lequel il est atteint.

Correction du Test n°5

Exercice 1 :

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 8x + 7$.

   a) Justifier que, quel que soit le réel x, on a : $f(x) = 2(x+2)^2 - 1$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$,
A = $2(x+2)^2 - 1$
A = $2(x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2) - 1$
A = $2(x^2 + 4x + 4) - 1$
A = $2x^2 + 8x + 8 - 1 = 2x^2 + 8x + 7 = f(x)$

   b) Calculer $f(-2)$.

$f(-2) = 2(-2+2)^2 - 1 = 2 \times 0^2 - 1 = -1$

   c) Justifier que $f(x) - f(-2)$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$,
$f(x) - f(-2) = 2(x+2)^2 - 1 - (-1) = 2(x+2)^2 - 1 + 1 = 2(x+2)^2$
Or $2 > 0$ et un carré est toujours positif ou nul donc : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(-2) \geq 0$

   d) En déduire que la fonction f admet un extremum (à préciser). En quelle valeur de x est-il atteint ?

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(-2) \geq 0$
On en déduit : $f(x) \geq f(-2)$ c'est-à-dire $f(x) \geq -1$
Ainsi, la fonction f admet pour minimum -1. Ce minimum est atteint en $x = -2$.

2. g est la fonction définie par $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

   a) Justifier que, quel que soit le réel x, on a $g(x) = -\frac{1}{3}(x-1)^2 + 3$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$,
A = $-\frac{1}{3}(x-1)^2 + 3$
A = $-\frac{1}{3}(x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2) + 3$
A = $-\frac{1}{3}(x^2 - 2x + 1) + 3$
A = $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3} \times 2x - \frac{1}{3} \times 1 + 3$
A = $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} + \frac{9}{3} = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} = g(x)$

   b) Démontrer que g admet un extremum. Préciser sa valeur et le réel x en lequel il est atteint.

$g(1) = -\frac{1}{3}(1-1)^2 + 3 = -\frac{1}{3} \times 0^2 + 3 = 3$
$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g(x) - g(1) = -\frac{1}{3}(x-1)^2 + 3 - 3 = -\frac{1}{3}(x-1)^2$
Or, un carré est toujours positif ou nul mais $-\frac{1}{3} < 0$.
Donc : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g(x) - g(1) \leq 0$
On en déduit : $g(x) \leq g(1)$ c'est-à-dire $g(x) \leq 3$
Ainsi, la fonction g admet pour maximum 3. Ce maximum est atteint en $x = 1$.