Nom :
Classe : TMATHS4

Test n°5
Calculs matriciels

Date : 13/01/2023
Note : … / 15

Compétences du livret scolaire :	Avis du professeur Non maîtrisée → Bien maîtrisée
• (C1) Mener une recherche de façon autonome.	Non évaluée
• (C2) Modéliser, faire une simulation, valider ou invalider un modèle.	
• (C3) Représenter, choisir un cadre, changer de registre.	Non évaluée
• (C4) Calculer, appliquer des techniques, mettre en œuvre des algorithmes.	
• (C5) Raisonner, argumenter en exerçant un regard critique, démontrer.	Non évaluée
• (C6) Communiquer à l'écrit en utilisant un langage rigoureux et des outils pertinents.	
• (C7) Communiquer à l'oral en utilisant un langage rigoureux et des outils pertinents.	Non évaluée

Exercice 1 : Calculer, en détaillant les étapes pour les multiplications de matrices. **… / 5,5**

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$

$3A - B =$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

$A \times B =$

c) Peut-on calculer $B \times A$? Justifier.

d) $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

$A \times B =$

e) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

$A^2 =$

Exercice 2 : **… / 1,5**

Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ sont inverses l'un de l'autre.

Exercice 3 : **… / 3**

On considère la matrice A = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$. Justifier, par le calcul de son déterminant que A est inversible puis déterminer son inverse A $^{-1}$ = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en résolvant un système.

Exercice 4 : Gérer un service hospitalier d'urgence. **… / 5**

Un service hospitalier d'urgences accueille chaque semaine un nombre important de personnes à soigner.
Il est nécessaire de répertorier rapidement les différentes urgences pour pouvoir répondre le plus efficacement et le plus rapidement possible aux demandes de soin. Le service classifie trois sortes de patients :

- les urgences graves, donc prioritaires, de type P_1
- les urgences secondaires, non prioritaires, de type P_2
- les patients qui se présentent pour des soins qui ne relèvent pas des urgences, de type P_3

Chaque semaine, le service relève les statistiques concernant le nombre de patients reçus. On note :

- x_i est le nombre de patients de type P_1
- y_i est le nombre de patients de type P_2
- z_i est le nombre de patients de type P_3

où $i \in [| 1 ; 52 |]$ désigne la i-ème semaine de l'année civile.

On note X$_i$ = $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$. Cette matrice est appelée matrice des urgences, la i-eme semaine de l'année civile en cours.

Pour une urgence de type P_1 le coût moyen par patient est de $1\,500$ € ; le temps moyen de prise en charge et de soin est de 3 h ; la masse moyenne de matériel médical utilisé non recyclable est de $2,5$ kg.
Pour une urgence de type P_2 le coût moyen par patient est de 650 € ; le temps moyen de prise en charge et de soin est de $1,5$ h ; la masse moyenne de matériel médical utilisé non recyclable est de 1 kg.
Pour une urgence de type P_3 le coût moyen par patient est de 90 € ; le temps moyen de prise en charge et de soin est d'un quart d'heure ; la masse moyenne de matériel médical utilisé non recyclable est de 300 g.

On note A = $\begin{pmatrix} 1\,500 & 650 & 90 \\ 3 & 1,5 & 0,25 \\ 2,5 & 1 & 0,3 \end{pmatrix}$ la matrice de fonctionnement.

1. On note X$_1$ = $\begin{pmatrix} 25 \\ 75 \\ 250 \end{pmatrix}$.

   a) Que signifient les coefficients de X$_1$ pour l'année 2023 ?

   b) Calculer A $\times$ X$_1$ puis interpréter les résultats obtenus.

2. Le service hospitalier ne peut dépasser certaines contraintes pour une semaine donnée.
   En particulier, il ne peut dépenser un budget supérieur à $224\,000$ €, faire travailler le personnel médical plus de 508 h et rejeter plus de 420 kg de matériel médical non recyclable.

   a) Mettre le problème en équation.

   b) Déterminer le nombre maximum de patients des trois types que le service peut accueillir par semaine.

Correction du Test n°5

Exercice 1 : Calculer, en détaillant les étapes pour les multiplications de matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$

$$3A - B = \begin{pmatrix} 9-1 & 6+3 \\ -12+8 & 15-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 \times 5 - 2 \times (-6) \\ 3 \times 5 - 4 \times (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+12 \\ 15+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$$

c) On ne peut calculer $B \times A$ car le nombre de colonnes de B est différent du nombre de lignes de A.

d) $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 6 \times (-3) - 1 \times 5 & 6 \times 4 - 1 \times (-2) \\ 7 \times (-3) + 9 \times 5 & 7 \times 4 + 9 \times (-2) \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} -18-5 & 24+2 \\ -21+45 & 28-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & 26 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}$$

e) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9+20 & -12-8 \\ -15-10 & 20+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & -20 \\ -25 & 24 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ sont inverses l'un de l'autre.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27+28 & -36+36 \\ 21-21 & 28-27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \times B = I_2$ donc B est l'inverse de A.

Exercice 3 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$. Justifier, par le calcul de son déterminant que A est inversible puis déterminer son inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en résolvant un système.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad det(A) = 2 \times (-6) + 3 \times 5 = -12 + 15 = 3 \neq 0$ donc A est inversible.

En notant A^{-1} l'inverse de A on a $A \times A^{-1} = I_2$

Or $A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+5c & 2b+5d \\ -3a-6c & -3b-6d \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On en déduit le système (S) : $\begin{cases} 2a+5c=1 & L_1 \\ 2b+5d=0 & L_2 \\ -3a-6c=0 & L_3 \\ -3b-6d=1 & L_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+5c=1 & L_1 \leftarrow 3L_1 \\ 2b+5d=0 & L_2 \leftarrow 3L_2 \\ -3a-6c=0 & L_3 \leftarrow 2L_3 \\ -3b-6d=1 & L_4 \leftarrow 2L_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a+15c=3 & L_1 \\ 6b+15d=0 & L_2 \\ -6a-12c=0 & L_3 \\ -6b-12d=2 & L_4 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2a+5c=1 & L_1 \\ 2b+5d=0 & L_2 \\ 6a-6a+15c-12c=3+0 & L_3 \leftarrow L_1+L_3 \\ 6b-6b+15d-12d=0+2 & L_4 \leftarrow L_2+L_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+5c=1 \\ 2b+5d=0 \\ 3c=3 \\ 3d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=1-5c \\ 2b=-5d \\ c=1 \\ d=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2}(1-5) = \dfrac{-4}{2} = -2 \\ b = \dfrac{-5}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{-5}{3} \\ c = 1 \\ d = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Ainsi $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \dfrac{-5}{3} \\ 1 & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$

Exercice 4 : Gérer un service hospitalier d'urgence.

Un service hospitalier d'urgences accueille chaque semaine un nombre important de personnes à soigner.
Il est nécessaire de répertorier rapidement les différentes urgences pour pouvoir répondre le plus efficacement et le plus rapidement possible aux demandes de soin. Le service classifie trois sortes de patients :

- les urgences graves, donc prioritaires, de type P_1
- les urgences secondaires, non prioritaires, de type P_2
- les patients qui se présentent pour des soins qui ne relèvent pas des urgences, de type P_3

Chaque semaine, le service relève les statistiques concernant le nombre de patients reçus. On note :

- x_i est le nombre de patients de type P_1
- y_i est le nombre de patients de type P_2
- z_i est le nombre de patients de type P_3 où $i \in [\![1 ; 52]\!]$ désigne la i-ème semaine de l'année civile.

On note $X_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$. Cette matrice est appelée matrice des urgences, la i-eme semaine de l'année civile en cours.

Pour une urgence de type P_1 le coût moyen par patient est de $1\,500$ € ; le temps moyen de prise en charge et de soin est de 3 h ; la masse moyenne de matériel médical utilisé non recyclable est de $2,5$ kg.
Pour une urgence de type P_2 le coût moyen par patient est de 650 € ; le temps moyen de prise en charge et de soin est de $1,5$ h ; la masse moyenne de matériel médical utilisé non recyclable est de 1 kg.
Pour une urgence de type P_3 le coût moyen par patient est de 90 € ; le temps moyen de prise en charge et de soin est d'un quart d'heure ; la masse moyenne de matériel médical utilisé non recyclable est de 300 g.

On note $A = \begin{pmatrix} 1\,500 & 650 & 90 \\ 3 & 1,5 & 0,25 \\ 2,5 & 1 & 0,3 \end{pmatrix}$ la matrice de fonctionnement.

1. a) On note $X_1 = \begin{pmatrix} 25 \\ 75 \\ 250 \end{pmatrix}$. Que signifient les coefficients de X_1 pour l'année 2023 ?

La $1^{\text{ère}}$ semaine de janvier, les urgences ont accueilli 25 patients de type P_1, 75 de type P_2 et 250 de type P_3,

b) Calculer $A \times X_1$ puis interpréter les résultats obtenus.

$$A \times X_1 = \begin{pmatrix} 1\,500 & 650 & 90 \\ 3 & 1,5 & 0,25 \\ 2,5 & 1 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25 \\ 75 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,500 \times 25 + 650 \times 75 + 90 \times 250 \\ 3 \times 25 + 1,5 \times 75 + 0,25 \times 250 \\ 2,5 \times 25 + 1 \times 75 + 0,3 \times 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108\,750 \\ 250 \\ 212,5 \end{pmatrix}$$

La $1^{\text{ère}}$ semaine de janvier 2023, le service d'urgences a dépensé $108\,750$ €, fait travailler son personnel sur 250 h et rejeté $212,5$ kg de matériel médical non recyclable.

2. Le service hospitalier ne peut dépasser certaines contraintes pour une semaine donnée.
En particulier, il ne peut dépenser un budget supérieur à $224\,000$ €, faire travailler le personnel médical plus de 508 h et rejeter plus de 420 kg de matériel médical non recyclable.

a) Mettre le problème en équation.

Il faut résoudre $A \times X = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1\,500 & 650 & 90 \\ 3 & 1,5 & 0,25 \\ 2,5 & 1 & 0,3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 224\,000 \\ 508 \\ 420 \end{pmatrix}$

b) Déterminer le nombre maximum de patients des trois types que le service peut accueillir par semaine.

La calculatrice donne $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{1\,075} & \frac{-84}{43} & \frac{22}{43} \\ \frac{-11}{2\,150} & \frac{180}{43} & \frac{-84}{43} \\ \frac{-3}{215} & \frac{100}{43} & \frac{240}{43} \end{pmatrix}$. On en déduit $X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} 56 \\ 160 \\ 400 \end{pmatrix}$. Ainsi, chaque semaine, les urgences ne peuvent accueillir que 56 patients de type P_1, 160 de type P_2 et 400 de type P_3,